La décomposition de Dunford-Newton.

On se place dans E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie d où $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle.

Théorème (Dunford)**.** *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphsimes de E tels que d est diagonalisable, n est nilpotent, d et n commutent et $u = d + n$. De plus d et n sont des polynômes en u.*

La construction de d et n est effective et ne nécessite pas le calcul des valeurs propres de u. Plus précisément, on va montrer :

Théorème (Dunford-Newton)**.** *La suite d'endomorphismes définie par :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & u_n - P(u_n)P'(u_n)^{-1} \\ u_0 & = & u \end{array} \right. \qquad \text{où} \quad P = \frac{\chi_u}{\chi_u \wedge \chi_u'}$$

est bien définie et stationne vers d qui vérifie l'énoncé du théorème précédent.

Preuve. On montre par récurrence les propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$(i)\ P'(u_n) \in GL_d(\mathbf{K}) \qquad (ii)\ P(u_n) \in P(u)^{2^n}\mathbf{K}[u] \qquad (iii)\ u_n \in \mathbf{K}[u]$$

- Pour $n = 0$, il n'y a que le (i) à montrer et cela vient de la définition de P. Par construction, c'est un polynôme scindé (car χ_u l'est) à racines simples. En fait, en caractéristique nulle :
$$\chi_u = \prod (X - \lambda_i)^{m_i} \implies P = \prod (X - \lambda_i).$$
Bien sûr, $P \wedge P' = 1$ donc $P^m \wedge P' = 1$ pour tout $m \in \mathbf{N}$. Mais compte-tenu de la forme de P, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $\chi_u | P^m$. Le théorème de Bézout donne pour un certain $A \in \mathbf{K}[X]$:
$$A(u)P'(u) = I_d \quad i.e \quad P'(u) \in GL_d(\mathbf{K}).$$
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n, $n \geq 0$. La première chose à voir est que u_{n+1} est bien défini et est un polynôme en u. Puis on commence par écrire la formule de Taylor pour les polynômes : il existe $Q \in \mathbf{K}[X, Y]$ tel que :
$$P(X + Y) = P(X) + YP'(X) + Y^2Q(X, Y).$$
On trouve :
$$\begin{array}{rcl} P(u_{n+1}) & = & P\big(u_n + (u_{n+1} - u_n)\big) \\ & = & P(u_n) + (u_{n+1} - u_n)P'(u_n) + (u_{n+1} - u_n)^2Q(u_n, u_{n+1} - u_n) \\ & = & P(u_n) - P(u_n) + P(u_n)^2P'(u_n)^{-2}Q(u_n, u_{n+1} - u_n) \\ & = & P(u)^{2^{k+1}}\Big[P'(u_n)^{-2}Q(u_n, u_{n+1} - u_n)] \in P(u)^{2^{n+1}}\mathbf{K}[u] \end{array}$$
car l'inverse est un polynôme. On vient de montrer (ii). Pour montrer (i), il suffit d'écrire, toujours avec la même formule mais à l'ordre 1 :
$$P'(u_{n+1}) = P'(u_n) + (u_{n+1} - u_n)R(u_n)$$
puis de constater que $u_{n+1} - u_n = P(u_n)P'(u_n)^{-1}$ est nilpotent car $P(u_n)$ l'est car $u_n \in P(u)^{2^n}\mathbf{K}[u]$ et $P(u)$ est nilpotent. Finalement,
$$P'(u_{n+1}) = \text{ inversible} + \text{nilpotent}, \quad \text{les deux commutant.}$$

Il ne reste plus qu'à voir la stationnarité de la suite : c'est la même argument, à partir d'un certain rang pour lequel $\chi_u | P^{2^n}$:

$$P(u)^{2^n} = P^{2^n}(u) = 0 \implies P(u_n) = 0 \implies u_{n+1} = u_n.$$

Notons $d = u_N$ la limite comme dans l'énoncé. C'est un polynôme en u et $P(d) = 0$ donc d est diagonalisable car annulé par un polynôme scindé à racines simples. De plus,

$$n = u - d = \sum_{n=0}^{N-1} u_n - u_{n+1} = -\sum_{n=0}^{N-1} P(u_n)P'(u_n)^{-1}$$

est une somme d'endomorphismes nilpotents qui commutent donc est nilpotent. Bien sûr c'est aussi un polynôme en u donc commute avec d. □

PREUVE (UNICITÉ). S'il existait un autre couple (d', n') comme dans l'énoncé alors comme tout le monde est un polynôme en u, tout le monde commute avec tout le monde et en particulier d et d' sont co-diagonalisbales donc $d - d' = n - n'$ est diagonalisable. Mais $n - n'$ est un endomorphisme nilpotent comme somme d'endomorphismes nilpotents qui commutent. Le seul endomorphisme nilpotent diagonalisable étant 0, on obtient $n = n'$ puis $d = d'$. □

Référence. ?

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.