La Transformée de Fourier Rapide (FFT).

Dans $\mathbf{C}^N$, on considère

$$\omega \equiv \omega_N = \exp\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)$$

et si $f = (f(0), \dots, f(N-1))^T \in \mathbf{C}^N$, on appelle $\hat{f} \in \mathbf{C}^N$ sa transformée de Fourier discrète définie par :

$$\forall k \in \{0, \dots, N-1\}, \;\; \hat{f}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\omega^{kn}.$$

On appelle $F_N \in \mathcal{M}_N(\mathbf{C})$ la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'écrire de façon plus concise :

$$\hat{f} = F_N f.$$

Théorème. *Il existe un algorithme permettant de calculer le vecteur $\hat{f}$ à partir du vecteur f en $\mathcal{O}(N \log N)$ opérations.*

Preuve. Quitte à rajouter quelques zéros, on peut supposer que N est pair et même que c'est une puissance de deux. La grande idée est de réordonner les colonnes de F_N : d'abord celles d'indice pair et ensuite les autres. Autrement dit, en notant en colonnes $F_N = (e_0, \dots, e_{N-1})$, on regarde

$$F_N^r = (e_0, \dots, e_{N-2}, e_1, \dots, e_{N-1}).$$

Comme $\omega^N = 1$ et $\omega^{N/2} = -1$, la matrice F_N^r s'écrit :

$$F_N^r = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & \omega & \omega^3 & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & & \omega^{\frac{N}{2}-1} & & & \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & & -1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & -\omega & \dots & & -\omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & & -\omega^{\frac{N}{2}-1} & \dots & & \end{array}\right)$$

Et comme $\omega_N^2 = \omega_{N/2}$ on peut finalement écrire :

$$F_N^r = \left(\begin{array}{c|c} F_{N/2} & B \\ \hline F_{N/2} & -B \end{array}\right)$$

En plus, en factorisant la ligne $k \in \{1, \ldots, N/2\}$ de B par ω^{k-1}, on trouve :

$$B = DF_{N/2} \quad \text{avec} \quad D = \mathrm{diag}(1, \ldots, \omega^{\frac{N}{2}-1}).$$

Finalement, avec les vecteurs réordonnés :

$$f^r = \begin{pmatrix} f_{\text{pair}} \\ f_{\text{impair}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f(0) \\ \vdots \\ f(N-2) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} \hat{f}^1 \\ \hat{f}^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \vdots \\ \hat{f}(N/2-1) \\ \hat{f}(N/2) \\ \vdots \\ \hat{f}(N-1) \end{pmatrix}$$

on doit calculer :

$$\hat{f} = F_N^r f^r$$

ce qui s'écrit pr blocs :

$$\begin{pmatrix} \hat{f}^1 \\ \hat{f}^2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} F_{N/2} & DF_{N/2} \\ \hline F_{N/2} & -DF_{N/2} \end{array}\right) \begin{pmatrix} f_{\text{pair}} \\ f_{\text{impair}} \end{pmatrix}$$

C'est fini :

$$\begin{aligned} \hat{f}^1 &= F_{N/2} f_{\text{pair}} + DF_{N/2} f_{\text{impair}} \\ \hat{f}^2 &= F_{N/2} f_{\text{pair}} - DF_{N/2} f_{\text{impair}}. \end{aligned}$$

On voit donc qu'il suffit de calculer deux transformée de Fourier de taille $N/2$ et il ne reste plus qu'à compter : si $C(N)$ est le nombre de multiplications nécessaires au calcul du vecteur $\hat{f}$ à partir de f, on voit :

$$C(N) = 2C(N/2) + \mathcal{O}(N)$$

et on en déduit en écrivant $N = 2^p$ et $C'(N) = C(N)/N$:

$$C(N) = \mathcal{O}(N \log_2 N).$$

□

Une application rapide et élégante de ce résultat est le calcul et l'étude de la stabilité du θ-schéma pour l'équation de la chaleur.

Références.

P. D. Lax, *Linear Algebra and its Applications, Second Edition*
G. Peyré, *L'Algèbre Discrète de la Transformée de Fourier*

102 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
110 Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.