Sur les groupes paveurs du plan.

Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien de direction E.

Définition (Groupe paveur)**.** On dit qu'un sous-groupe G de $Is^+(\mathcal{E})$ est un groupe paveur (direct) lorsqu'il existe un compact connexe P d'intérieur non vide tel que G vérifie les axiomes suivants :

(i) $\bigcup_{g \in G} g(P) = \mathcal{E}$.

(ii) $g(\mathring{P}) \cap h(\mathring{P}) \Rightarrow g = h$.

On notera $T \subset Is^+(\mathcal{E})$ l'ensemble des translations. Soit G un groupe paveur.

Lemme. *Soit Γ un sous-groupe de E. On suppose que :*

(i) Γ est discret au sens où pour tout $u \in \Gamma$, il existe $r > 0$ tel que $B(u, r) \cap \Gamma = \{u\}$.

(ii) Γ engendre E en tant qu'espace vectoriel.

Alors Γ est un réseau au sens où il existe une famille $\mathbf{R}$-libre $(u, v) \in E \times E$ (appelée base de Γ) telle que

$$\Gamma = \mathbf{Z}u \oplus \mathbf{Z}v.$$

De plus, on peut prendre pour base de Γ tout couple $(u, v) \in \Gamma$ vérifiant :

$$\|u\| = \min_{x \in \Gamma \setminus \{0\}} \|x\|, \quad et \quad \|v\| = \min_{x \in \Gamma \setminus \mathbf{Z}u} \|x\|.$$

Preuve. Puisque Γ est discret, on peut choisir $u \in \Gamma \setminus \{0\}$ tel que $\|u\|$ soit minimal, puis $v \in \Gamma \setminus \mathbf{R}u$ tel que $\|v\|$ soit minimal. On va montrer que $\Gamma \subset \mathbf{Z}u \oplus \mathbf{Z}v$. Soit $w = \lambda u + \mu v \in \Gamma \setminus \{0\}$ avec $\lambda, \mu \in [0, 1[$ (quitte à translater). Si λ ou μ est nul, cela contredit la minimalité de u ou v. Si λ et μ sont non nuls, alors un calcul montre que :

$$\|w\|^2 < (a + b)\|u\|^2 \quad \text{donc} \quad a + b > 1.$$

Mais en refaisant pareil avec $w' = u + v - w$ on trouve $a + b < 1$. C'est contradictoire. Finalement $w = 0$ et la conclusion suit. □

Théorème. *Il y a à conjugaison près dans $GL(\mathbf{R}^2)$ exactement cinq groupes paveurs.*

Preuve. Il y a trois étapes.

Étape 1. Étude des translations de G.

On note $T(G)$ l'ensemble des translations de G et $\Gamma(G) \subset E$ le sous-espaces des $\vec{u} \in E$ tels que $t_{\vec{u}} \in T(G)$. **Il s'agit de montrer que $\Gamma(G)$ est un réseau de E.**

- D'abord, $\Gamma(G)$ est discret car si on choisit $\varepsilon > 0$ tel que P contienne une boule de rayon ε alors, puisque pour tout $g \in G \setminus \{id\}$, $g(\mathring{P}) \cap \mathring{P} = \emptyset$, on a :

$$\vec{u} \in \Gamma(G) \Rightarrow \|\vec{u}\| \geq 2\varepsilon.$$

et la structure de groupe de $\Gamma(G)$ permet de conclure.

- Supposons que $\Gamma(G) = \{0\}$ alors G ne contient que des rotations. Si deux rotations avaient des centres distincts, leur commutateur serait une translation non triviale donc toutes les rotations ont même centre et comme P est compact, $G(P)$ aussi et le premier axiome n'est pas vérifié. Supposons ensuite que $\Gamma(G) \subset \mathbf{R}\vec{u}$. Alors si $r \in G \setminus T(G)$, on a $r \circ t_{\vec{u}} \circ r^{-1} = t_{\vec{r}(\vec{u})} \in T(G)$ donc $\vec{r}(\vec{u})$ est colinéaire à $\vec{u}$ et r est une symétrie centrale. La composée de deux symétries centrales autour de deux centres distincts A et B est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$. Finalement, les centres des symétries sont sur une même droite dirigée par $\vec{u}$ et le premier axiome ne peut pas être vérifié.

Finalement, $\Gamma(G)$ est discret et contient une base de E donc c'est un réseau par le lemme préliminaire.

Étape 2. Étude des rotations de G.

On note $\vec{G} = \{\vec{f},\ f \in G\} \subset GL(E)$. **Il s'agit de montrer que $\vec{G}$ est isomorphe à un groupe cyclique d'ordre 1, 2, 3, 4 ou 6**.

Soit $g \in G$. On considère une base $(\vec{u}, \vec{v})$ du réseau $\Gamma(G)$. Comme

$$g \circ t_{\vec{u}} \circ g^{-1} = t_{\vec{g}(\vec{u})} \in G$$

alors $\vec{g}(\vec{u}) \in \mathbf{Z}\vec{u} + \mathbf{Z}\vec{v}$ et de même pour $\vec{v}$. Ainsi, la matrice de $\vec{g}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ est à coefficients entiers. En notant θ l'angle de la rotation $\vec{g}$, on trouve : $\mathrm{Tr}\,\vec{g} = 2\cos\theta \in \mathbf{Z}$, de sorte que $\vec{g} \in \{id, -id, R_{\pi/2}, R_{\pi/3}, R_{2\pi/3}\}$. Puisque la composée de deux telles rotations distinctes et distinctes de $\pm id$ n'est pas une rotation listée, on est assuré que $\vec{G}$ est cyclique avec un ordre parmi ceux annoncés.

Étape 3. Conclusion.

D'abord, il existe des groupes paveurs dont l'ordre de la partie linéaire est un des cinq listés : il suffit d'en exhiber. Ensuite :

- Soient $n \in \{1, 2\}$ et G_1 et G_2 deux groupes paveurs de partie linéaire d'ordre n. Ainsi, pour $i \in \{1, 2\}$, $\vec{G}_i$ est engendré par les translations $t_{\vec{u}_i}$ et $t_{\vec{v}_i}$ et éventuellement la symétrie centrale s_i de centre A_i lorsque $n = 2$. On considère l'application affine $f \in GA(\mathcal{E})$ définie par
$$f(A_1) = A_2 \ \text{ et } \ \vec{f}(\vec{u}_1) = \vec{u}_2, \quad \vec{f}(\vec{v}_1) = \vec{v}_2.$$
On a bien $G_2 = fG_1f^{-1}$.
- Soient $n \in \{3, 4, 6\}$ et G_1 et G_2 deux groupes paveurs de partie linéaire d'ordre n. Pour $i \in \{1, 2\}$ on considère r_i une rotation de centre A_i qui engendre $\vec{G}_i$ et $\vec{u}_i \in \Gamma(G_i) \setminus \{0\}$ de norme minimale. Soit $\vec{v}_i = \vec{r}_i(\vec{u}_i)$. Alors $(\vec{u}_i, \vec{v}_i)$ est une famille libre et comme $\|\vec{u}_i\| = \|\vec{v}_i\|$ c'est une base de $\Gamma(G_i)$ (lemme préliminaire). On considère la similitude affine $f \in GA(\mathcal{E})$ définie par
$$f(A_1) = A_2 \ \text{ et } \ \vec{f}(\vec{u}_1) = \vec{u}_2, \quad \vec{f}(\vec{v}_1) = \vec{v}_2.$$
On a bien $G_2 = fG_1f^{-1}$.

$\square$

Références.

M. Berger, *Géométrie, Tome 1*
R. Krust, `https://www.lycee-champollion.fr/IMG/PavagesDirects_b.pdf`

161 Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimensions 2 et 3.
183 Utilisation des groupes en géométrie.