Le fameux ellipsoïde de John et Loewner

assorti de quatre preuves de la log-concavité du déterminant
(La quatrième va vous étonner)

Le théorème qui suit, comme tout bon résultat d'analyse convexe, va servir à montrer l'unicité d'un extremum.

Théorème. *Soient $A, B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $t \in [0,1]$. Alors :*

$$\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}.$$

Avec égalité si et seulement si $A = B$.

On va donner quatre preuves (plus ou moins détaillées) de ce résultat.

La preuve algébriste. On invoque le théorème de peudo-réduction simultanée et on écrit :

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP \quad \text{où} \quad P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Ensuite, on remplace :

$$(\det A)^t (\det B)^{1-t} = \det P^2 (\det D)^{1-t} \quad \text{et} \quad \det(tA + (1-t)B) = \det P^2 \det(tI_n + (1-t)D).$$

En prenant le logarithme, on doit montrer :

$$\sum_{i=1}^n \ln(t + (1-t)\lambda_i) \geq (1-t) \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i.$$

Mais comme le logarithme est concave, c'est évident. □

La preuve astucieuse. On pose $C = B^{-1}A \in \mathscr{S}_n^{++}$ et on remplace :

$$\det(tA + (1-t)B) = \det B \det(tC + (1-t)I_n) \quad \text{et} \quad (\det A)^t (\det B)^{1-t} = \det B (\det C)^t$$

de sorte qu'il suffit de montrer :

$$\det(tC + (1-t)I_n) \geq (\det C)^t$$

ou encore :

$$\prod_{i=1}^n (tc_j + 1 - t) \geq \prod_{i=1}^N c_j^t$$

où les c_j sont les valeurs propres de C. Mais là encore, c'est évident car en prenant le logarithme, on voit que pour tout $c > 0$:

$$c^t \leq tc + (1-t)$$

avec égalité si et seulement si $t = 0$ ou $t = 1$. □

La preuve par le calcul différentiel. On étudie la convexité de la fonction $\log\det$ définie sur le convexe $\mathscr{S}_n^{++}$. Une caractérisation usuelle est la suivante :

$$\log\det \ \text{ est convexe } \ \Leftrightarrow \ \forall A, B \in \mathscr{S}_n^{++},\ f(t) = \log\det(tA + (1-t)B) \text{ est convexe.}$$

Et il n'y a plus qu'à différentier deux fois cette dernière fonction pour conclure. On trouve :

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = -\operatorname{tr}\Big((Y^{-1}\dot{Y})^2\Big) \ \text{ où } \ Y(t) = B + t(A - B).$$

Maintenant, on écrit que la trace du carré d'une matrice est la somme de ses valeurs propres au carré et on se débrouille pour justifier que $Y^{-1}\dot{Y}$ a des valeurs propres réelles. $\square$

La preuve par le calcul intégral (by P. D. Lax). On commence par remarquer que si $H \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors en diagonalisant H en base othonormée et en effectuant le même changement de variable que dans la preuve du théorème de l'ellipsoïde de John et Loewner, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle x, Hx\rangle} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det H}}.$$

Il suffit d'appliquer cette jolie formule et l'inégalité de Hölder pour conclure :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(tA + (1-t)B)}} &= \int_{\mathbf{R}^n} e^{-t\langle x, Ax\rangle} e^{-(1-t)\langle x, Bx\rangle} dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle x, Ax\rangle} dx\right)^t \left(\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\langle x, Bx\rangle} dx\right)^{1-t} \\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{(\det A)^t (\det B)^{1-t}}}
\end{aligned}$$

Pour $t \in (0,1)$, il y a égalité dans l'inégalité de Hölder si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $e^{-\langle x, Ax\rangle}$ et $e^{-\langle x, Bx\rangle}$ sont colinéaires. En spécifiant en $x = 0$ on a égalité si et seulement si $A = B$. $\square$

Théorème (John-Loewner)**.** *Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.*

Preuve. Lorsque $\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle, un ellipsoïde (plein) centré en 0 a une équation du type $q(x) \leq 1$ où q appartient à $\mathcal{Q}_{++}$ l'ensemble des formes quadratiques définies positives. On note dans ce cas :

$$\mathscr{E}_q = \{x \in \mathbf{R}^n,\ q(x) \leq 1\}.$$

Étape 1. Calculons sans complexe le volume d'un ellipsoïde et théorisons.

Soit $q \in \mathcal{Q}_{++}$ de matrice $S \in \mathscr{S}_n^{++}$ qui dans une base orthonormale s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$. N'ayons pas peur :

$$\mathscr{V}(\mathscr{E}_q) \ = \ \iint \cdots \int_{a_1 x_1^2 + \ldots a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \ldots dx_n = \iint \cdots \int_{x_1^2 + \ldots x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 \ldots dx_n}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}} = \frac{V_0}{\sqrt{a_1 \ldots a_n}}$$

où V_0 désigne le volume de la boule unité en dimension n. Voici une reformulation du problème :

Maximiser $D(q) := \det S = a_1 \dots a_n$ **sur le domaine** $\mathscr{A} = \{q \in \mathcal{Q}_+,\ \forall x \in K,\ q(x) \leq 1\}$.

Avant toute chose et pour traiter ce problème d'optimisation, il faut une norme sur $\mathcal{Q} \supset \mathscr{A}$ l'espace des formes quadratiques. On pose :

$$N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|.$$

Étape 2. De l'optimisation.

Il s'agit essentiellement de montrer que $\mathscr{A}$ est un compact non vide et on pourra conclure par continuité de D.

- $\mathscr{A}$ **est non vide.** Soit $M > 0$ tel que $K \subset B(0, M)$. Alors, on pose :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ q(x) = \frac{\|x\|^2}{M^2}$$

  et on a bien $q \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ **est fermé.** Adoptons un point de vue séquentiel : soit $\mathscr{A} \ni q_n \to q$ pour la topologie de la norme N. Alors :

$$\forall x \in \mathbf{R}^n,\ |q_n(x) - q(x)| \leq N(q - q_n)\|x\| \implies \forall x \in \mathbf{R}^n \lim_{n \to +\infty} q_n(x) = q(x).$$

- $\mathscr{A}$ **est borné.** Soient $a \in K$ et $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset K$. Maintenant, pour $q \in \mathscr{A}$ on a pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| \leq r$:

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{(q(a + x - a)} \leq \sqrt{q(a + x)} + \sqrt{q(-a)} = \sqrt{q(a + x)} + \sqrt{q(a)} \leq 2.$$

  Et par homogénéité, si $\|x\| \leq 1$:

$$|q(x)| = q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}.$$

La fonction D est continue sur le compact $\mathscr{A}$ donc atteint son maximum en q_0 qui est définie positive.

Étape 3. Ne pas oublier l'unicité.

Pour l'unicité, on va montrer que $\mathscr{A}$ est convexe et utiliser la log-concavité du déterminant. Allons-y : soient $q, q' \in \mathscr{A}$ et $t \in (0, 1)$. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$:

$$0 \leq (tq + (1 - t)q')(x) \leq t + (1 - t) = 1.$$

donc $tq + (1-t)q' \in \mathscr{A}$. Maintenant, s'il existait $q \in \mathscr{A}$ distincte de q_0 telle que $D(q) = D(q_0)$, on écrirait :

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{1/2}(\det(S_0))^{1/2} \geq \det S_0 = D(q_0)$$

et ce serait bien sûr contradictoire avec la maximalité de $D(q_0)$. □

Une remarque complémentaire.

Il existe au moins une application de ce résultat. Remarquons d'abord qu'il se généralise sans mal à un espace euclidien E quelconque quitte à le munir d'une structure qui le rend isomorphe à $\mathbf{R}^n$ pour un certain n. Lorsqu'on a vu cela, on est prêt à montrer sans utiliser le théorème de pont fixe de Kakutani qu'un sous groupe compact de $GL(E)$ est toujours contenu dans le groupe des isométries d'une certaine forme quadratique (d'après M. Alessandri).

Le livre dédié aux Équations aux Dérivées Partielles de F. John est très bien.

Références.

S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS. Algèbre 3.*
P. D. Lax, *Linear Algebra and Its Applications. Second Edition.*
M. Alessandri, *Thèmes de Géométrie.*

152 Déterminant. Exemples et applications.
170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
203 Utilisation de la notion de compacité.
219 Extrema : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.