Des noyaux itérés à la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents en passant par les tableaux de Young.

On note $\mathcal{N}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Le but est l'étude de l'action par conjugaison de $GL_n(\mathbf{C})$ sur $\mathcal{N}_n(\mathbf{C})$.

Soit $A \in \mathcal{N}_n(\mathbf{C})$ d'indice de nilpotence $m \leq n$. On note $K_i = \operatorname{Ker} A^i$ les noyaux emboîtés :

$$\{0\} = K_0 \subsetneq K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = \mathbf{C}^n.$$

Pour tout entier i, on pose :

$$k_i = \dim \operatorname{Ker} A^i \quad \text{et} \quad \lambda_i = k_i - k_{i-1}.$$

Notons que $(k_i)_i$ et $(\lambda_i)_i$ sont constants sur chaque orbite de nilpotence. C'est la réciproque qui est intéressante.

Proposition. *La suite des dimensions d'essouffle au sens où :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\},\ 0 \leq \lambda_{i+1} \leq \lambda_i.$$

De plus, $(k_i)_i$ est strictement croissante avant de devenir stationnaire au rang m.

Preuve. Soit $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, la première inégalité est triviale puisque $K_i \subset K_{i+1}$. Et comme $AK_{i+1} \subset K_i$, on peut composer les morphismes :

$$\nu : K_{i+1} \to K_i,\ X \mapsto AX \quad \text{et} \quad \pi_i : K_i \to K_i/K_{i-1},\ Y \mapsto \overline{Y}.$$

On a :

$$\operatorname{Ker}(\pi \circ \nu) = \nu^{-1}\big(\pi_i^{-1}(\{0\})\big) = \nu^{-1}(K_{i-1}) = K_i$$

et on peut passer au quotient pour en déduire une injection $K_{i+1}/K_i \hookrightarrow K_i/K_{i-1}$.

Enfin si $\operatorname{Ker} A^j = \operatorname{Ker} A^{j+1}$ alors si $k \geq j+1$ et $x \in \operatorname{Ker} A^k$ alors $A^{k-j-1}x \in \operatorname{Ker} A^{j+1} = \operatorname{Ker} A^j$ donc $x \in \operatorname{Ker} A^{k-1}$ et on conclut facilement que $\operatorname{Ker} A^j = \operatorname{Ker} A^k$. □

Remarquons que $\sum_{j=1}^n \lambda_j = n$ est une partition de l'entier n que l'on représente sous la forme d'un tableau de Young que l'on note $Y(A)$ et que l'on aurait pu tout aussi bien noter $Y(\mathscr{O})$ où $\mathscr{O}$ est l'orbite de A. Remplissons le :

(1) Soit G_m un supplémentaire de K_{m-1} dans $K_m = \mathbf{C}^n$:

$$K_{m-1} \oplus G_m = K_m \quad \text{et} \quad \dim G_m = \lambda_m.$$

On décide que $(v_m^1, \ldots, v_m^{\lambda_m})$ est une base de G_m.

(2) On remarque que $(Av_m^1, \ldots, Av_m^{\lambda_m})$ est une famille libre qui engendre un sous-espace qui intersecte K_{m-2} trivialement puisque :

$$A^{m-2}Av_m^k = A^{m-1}v_m^k \neq 0.$$

(3) On a le droit de compléter :

$$(Av_m^1, \dots, Av_m^{\lambda_m}, \dots, v_{m-1}^{\lambda_m+1}, \dots, v_{m-1}^{\lambda_{m-1}}) \text{ est une base de } G_{m-1}$$

avec

$$K_{m-2} \oplus G_{m-1} = K_{m-1}.$$

(4) Par récurrence descendante, on construit comme cela des supplémentaires G_r de K_{r-1} dans K_r.

On stocke tout cela dans le tableau de Young :

v_m^1	v_m^2	$\dots$	$v_m^{\lambda_m}$						
Av_m^1	Av_m^2	$\dots$	$Av_m^{\lambda_m}$	$v_{m-1}^{\lambda_m+1}$	$\dots$	$v_{m-1}^{\lambda_{m-1}}$			
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$A^{n-r}v_m^1$	$A^{n-r}v_m^2$	$\dots$	$A^{n-r}v_m^{\lambda_m}$	$A^{n-r-1}v_{m-1}^{\lambda_m+1}$	$\dots$	$A^{n-r-1}v_{m-1}^{\lambda_{m-1}}$	$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$		
$A^{m-1}v_m^1$	$A^{m-1}v_m^2$	$\dots$	$A^{m-1}v_m^{\lambda_m}$	$A^{m-2}v_{m-1}^{\lambda_m+1}$	$\dots$	$A^{m-2}v_{m-1}^{\lambda_{m-1}}$	$\dots$	$\dots$	$v_1^{\lambda_1}$

On vient de construire une base de $\mathbf{C}^n$ et si on lit le tableau de bas en haut et de gauche à droite, on voit que la matrice de A dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$$

où les J_k sont des blocs de Jordan. On peut aussi compter le nombre de blocs de Jordan : c'est le nombre de colonnes de même taille. Plus précisément, si $k \in \{1, \dots, m\}$, il y a exactement $\lambda_k - \lambda_{k+1}$ blocs de Jordan de taille k.

Théorème (Jordan)**.** *Le classe de similitude d'une matrice nilpotente est caractérisée par son diagramme de Young. Autrement dit, si A et B sont deux matrices nilpotentes, alors*

$$\mathscr{O}_A = \mathscr{O}_B \iff Y(A) = Y(B).$$

Preuve. Le sens direct est immédiat. Pour la réciproque, on vient de montrer que les matrices A et B était semblables à la même réduite de Jordan. $\square$

Références.

H2G2
P. Lax, *Linear and Its Applications, Second Edition*
R. Mansuy, *Algèbre linéaire, Réduction des endomorphismes*

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications. *(euh...)*
150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.