Méthodes.

Théorème (Méthode de Laplace)**.** *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ (borné ou non), $\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction C^2 et $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ L^1 telle que la fonction*

$$F(x) = \int_a^b e^{x\varphi(t)} f(t)dt$$

soit bien définie continue sur $x \in \mathbf{R}_+$.

1. Si φ atteint un maximum ordinaire en un unique point $t_0 \in]a,b[$, c'est à dire :

$$\varphi'(t_0) = 0, \quad \varphi''(t_0) < 0, \quad \textit{et} \quad \varphi' \textit{ ne s'annule qu'en } t_0$$

alors en supposant $f(t_0) \neq 0$:

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(t_0) \left(\frac{2\pi}{-\varphi''(t_0)} \right)^{1/2} \frac{e^{x\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}.$$

2. Si φ atteint son maximum en a et φ' ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors en supposant $f(a) \neq 0$:

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{f(a)}{-\varphi'(a)} \frac{e^{x\varphi(a)}}{x}.$$

Preuve. On commence par le premier cas et on regarde l'intégrale sur $[t_0, b[$. Le comportement de φ est quadratique au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{1}{2}\varphi''(t_0)(t-t_0)^2.$$

Comme φ est un C^1-difféormorphsime de $[t_0, b[$ sur $[\varphi(t_0), \varphi(b)[$, on peut écrire le changement de variable

$$s = (\varphi(t_0) - \varphi(t))^{1/2} \iff t = \psi(s) := \varphi^{-1}(\varphi(t_0) - s^2).$$

On obtient :

$$\int_{t_0}^b e^{x\varphi(t)} f(t)dt = e^{x\varphi(t_0)} \int_0^{(\varphi(t_0)-\varphi(b))^{1/2}} e^{-xs^2} g(s)ds$$

où $g(s) = f(\psi(s))\psi'(s)$.

Or, le théorème de convergence dominée et la continuité de g en 0 assurent pour α petit :

$$\int_0^\alpha e^{-xs^2} g(s)ds = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\alpha\sqrt{x}} e^{-u^2} g\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right) du \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{g(0)\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Le résultat reste valable pour tout $\alpha > 0$ puisque :

$$g \in L^1([a,b[) \implies \int_\alpha^\beta |e^{-xs^2} g(s)|ds \leq e^{-x\alpha^2} \int_\alpha^\beta |g(s)|ds \to 0.$$

Ici, on trouve finalement :

$$e^{x\varphi(t_0)} \int_0^{(\varphi(t_0)-\varphi(b))^{1/2}} e^{-xs^2} g(s)ds \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} g(0) \frac{e^{x\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $g(0) = f(\psi(0))\psi'(0) = f(t_0)\psi'(0)$. Or :

$$\psi^{-1} \circ \psi(s) = s \;\Rightarrow\; \psi'(0)(\psi^{-1})'(t_0) = 1$$

et

$$\psi^{-1}(t) = \sqrt{\varphi(t_0) - \varphi(t)} \;\Rightarrow\; (\psi^{-1})'(t) = \frac{-\varphi'(t)}{2\sqrt{\varphi(t_0) - \varphi(t)}} \underset{t \to t_0}{\sim} \frac{-(t - t_0)\varphi''(t_0)}{\sqrt{2}\sqrt{-\varphi''(t_0)}(t_0 - t)} = \sqrt{\frac{\varphi''(t_0)}{2}}.$$

D'où :

$$g(0) = f(t_0)\sqrt{\frac{2}{-\varphi''(t_0)}}.$$

On trouve le résultat en écrivant les mêmes arguments sur $[a, t_0]$ et en sommant.

Dans le second cas, c'est pareil avec le changement de variable

$$s = \varphi(a) - \varphi(t)$$

du coup, c'est plus simple. □

Théorème (Phase stationnaire)**.** *Soient $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}$ C^∞, $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ C_c^∞. Alors la fonction*

$$F(x) = \int_a^b e^{ix\varphi(t)} f(t) dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$. Si φ' s'annule en un unique point t_0, si ce point est intérieur à $[a, b]$ et tel que :

$$\varphi''(t_0) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(t_0) \neq 0$$

alors :

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(t_0) \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{|\varphi''(t_0)|}} e^{\operatorname{sgn}(\varphi''(t_0)) i\pi/4} \frac{e^{ix\varphi(t_0)}}{\sqrt{x}}.$$

Preuve. D'abord, on va regarder ce qu'il se passe lorsque φ' ne s'annule pas du tout.

Lemme (Compensation)**.** *Avec les mêmes hypothèses de régularité et en supposant que φ' ne s'annule pas sur l'intervalle $[c, d]$, on a lorsque $x \to +\infty$:*

$$\int_c^d e^{ix\varphi(t)} f(t) dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Preuve. On intègre par parties :

$$\begin{aligned}
\int_c^d e^{ix\varphi(t)} f(t) dt &= \frac{1}{ix} \int_c^d e^{ix\varphi(t)} ix\varphi'(t) \frac{f(t)}{\varphi'(t)} dt \\
&= \left[\frac{1}{ix} e^{ix\varphi(t)} \frac{f(t)}{\varphi'(t)}\right]_c^d - \frac{1}{ix} \int_c^d e^{ix\varphi(t)} \left(\frac{f}{\varphi'}\right)'(t) dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

□

□

Références.
V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif agrégation*
X. Gourdon, *Analyse*

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
223 Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
243 Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.