Le théorème de Müntz-Szász.

Théorème (Müntz-Szász)**.** *Soit $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers $+\infty$. Il y a équivalence entre :*

(i) L'espace vectoriel engendré par la famille $X = \{1, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \ldots\}$ est dense dans $\mathscr{C} := C([0,1], \mathbf{C})$ pour la norme uniforme.

(ii) $\sum \frac{1}{\lambda_j} = +\infty$

où on note un peu abusivement t^{λ_j} la fonction $t \mapsto t^{\lambda_j}$.

Preuve. La preuve consiste à relier l'étude des zéros de certaines fonctions holomorphes au critère de densité suivant : « $\operatorname{Vect} X$ *est dense dans* $\mathscr{C}$ *si et seulement si toute forme linéaire continue sur* $\mathscr{C}$ *qui s'annule sur* X *est nulle sur* $\mathscr{C}$ », lequel est une conséquence du théorème de Hahn-Banach. On notera $\lambda_0 = 1$

(**ii**) $\Rightarrow$ (**i**). Soit ℓ une forme linéaire qui s'annule sur X.

(1) Pour $\zeta \in \mathbf{C}$, $\operatorname{Re} \zeta > 0$, on considère la fonction :

$$f(\zeta) = \ell(t^\zeta)$$

qui est holomorphe sur $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ car pour $h \in \mathbf{C}$:

$$\frac{f(\zeta+h) - f(\zeta)}{h} - \ell\big(\log(t) t^\zeta\big) = \ell\left(\frac{t^{\zeta+h} - t^\zeta}{h} - \log(t) t^\zeta\right) \to 0.$$

(Écrire le développement de Taylor de $\zeta \to t^\zeta \in \mathbf{C}$ et prendre le sup en t.) De plus, comme $\|t^\zeta\|_\infty \leq 1$ et que ℓ est continue, f est aussi bornée sur $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$. Par hypothèse,

$$\forall j \geq 1, \ \ f(\lambda_j) = 0.$$

(2) Pour $N \geq 1$, on définit la *produit de Blaschke* $B_N(\zeta)$:

$$B_N(\zeta) := \prod_{j=1}^{N} \frac{\zeta - \lambda_j}{\zeta + \lambda_j}.$$

Le produit B_N vérifie les propriétés suivantes :

(a) $B_N(\lambda_j) = 0$ pour $j = 1, \ldots, N$ et $B_N(\zeta) \neq 0$ si $\zeta \neq \lambda_j$.

(b) $|B_N(\zeta)| \to 1$ lorsque $\operatorname{Re} \zeta \to 0$.

(c) $|B_N(\zeta)| \to 1$ lorsque $|\zeta| \to +\infty$.

De plus, puisque les zéros de B_N sont simples, la fonction :

$$g_N(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{B_N(\zeta)}$$

est bien définie et holomorphe sur $\{\operatorname{Re} \zeta > 0\}$.

(3) On prétend que g_N est bornée sur $\{\mathrm{Re}\,\zeta > 0\}$. D'abord f est bornée et on peut supposer sans perte de généralité que $|f(\zeta)| \le 1$. En utilisant les propriétés (b) et (c), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\mathrm{Re}\,\zeta = \delta \Rightarrow |g_N(\zeta)| \le 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad |\zeta| = \delta^{-1} \Rightarrow |g_N(\zeta)| \le 1 + \varepsilon.$$

Par le principe du maximum, la borne $|g_N(\zeta)| \le 1 + \varepsilon$ est valable sur tout le domaine $\{\mathrm{Re}\,\zeta \ge \delta\} \cap \{|\zeta| \le \delta^{-1}\}$. En laissant tendre $\varepsilon, \delta \to 0$, on obtient $|g_N(\zeta)| \le 1$ sur tout $\{\mathrm{Re}\,\zeta > 0\}$.

(4) On a finalement prouvé que :

$$|f(\zeta)| \prod_{j=1}^{N} \left| \frac{\lambda_j + \zeta}{\lambda_j - \zeta} \right| = |f(\zeta)| \prod_{j=1}^{N} \left| 1 + \frac{2\zeta}{\lambda_j - \zeta} \right| \le 1.$$

Et tout est en place pour conclure la première étape de la preuve : le théorème de sommation des relations de comparaison indique que si la série $\sum 1/\lambda_j$ diverge, alors le produit infini diverge et ce, pour tout $\zeta \in \mathbf{R}$ distinct des λ_j. La borne uniforme impose alors $\ell(t^\zeta) = f(\zeta) = 0$ pour tout $\zeta \in \mathbf{R}$. En particulier $\ell(t^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et on déduit du théorème de Weierstrass que $\ell \equiv 0$.

(i) $\Rightarrow$ **(ii)**. Par contraposée, on suppose la convergence de la série $\sum 1/\lambda_j < +\infty$ et on construit une forme linéaire continue non nulle sur $\mathscr{C}$ mais nulle sur X.

(1) En s'inspirant de la construction précédente mais en bricolant un peu plus, on considère la fonction :

$$f(z) = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda_j - z}{2 + \lambda_j + z} = \frac{z}{(2+z)^3} \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{2z+2}{2+\lambda_j+z}\right)$$

qui est holomorphe sur $\{\mathrm{Re}\,z > -2\}$ car le produit converge normalement sur tout compact par hypothèse. Les zéros de f sont exactement les λ_j auxquels on adjoint 0. Comme les facteurs du produit sont de module ≤ 1 pour $\mathrm{Re}\,z \ge -1$ (dessin), le produit est majoré par 1 et

$$|f(z)| \le \frac{\text{const.}}{|z|^2}, \quad \mathrm{Re}\,z \ge -1.$$

En particulier f est intégrable sur le droite $\mathrm{Re}\,z = -1$.

(2) Écrivons la formule de Cauchy pour $f(z)$ sur le contour $\Gamma_R := \{|\zeta + 1| = R, \mathrm{Re}\,\zeta \ge -1\} \cup [-1 - iR, -1 + iR]$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \mathrm{Re}\,z \ge -1.$$

Sur le demi-cercle $C_R := \{-1 + Re^{i\theta},\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$, l'intégrale est inférieure à :

$$\frac{\text{const.}}{R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R}{|Re^{i\theta} - z - 1|} dt \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

de sorte qu'il ne reste que l'intégrale sur la droite $\{\mathrm{Re}\,z = -1\}$:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-1+is)}{-1+is-z} ds, \quad \mathrm{Re}\,z \ge -1$$

(3) Très astucieusement, on remarque que :

$$\frac{1}{1+z-is} = \int_0^1 t^{z-is}dt, \quad \operatorname{Re} z \geq -1.$$

De sorte que :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)\left(\int_0^1 t^{z-is}dt\right)ds.$$

L'interversion est licite car tout est intégrable :

$$f(z) = \int_0^1 t^z \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-1+is)t^{-is}ds\right)dt =: \int_0^1 t^z w(t)dt.$$

(4) On définit la forme linéaire sur $\mathscr{C}$:

$$\ell(g) = \int_0^1 g(t)w(t)dt.$$

qui est continue puisque w est intégrable (car $|f(-1+is)| \leq \text{const.}/|1+s^2|$). De plus, pour tout ζ de partie réelle > 0 :

$$\ell(t^\zeta) = f(\zeta) \neq 0, \text{ si } \zeta \neq \lambda_j.$$

On a même montré un peu mieux : si $\lambda \neq \lambda_j$, alors t^λ n'appartient pas à $\overline{\operatorname{Vect} X}$.

□

Le détail de la preuve de l'holomorphie de f pour $(ii) \Rightarrow (i)$ et plein d'autres trucs sont chez Grégoire Clarté. Grâce lui en soit rendue.

Références.

P. Lax, *Functional Analysis*
W. Rudin, *Analyse réelle et complexe.*

201 Espaces de fonctions ; exemples et applications.
202 Exemples de parties denses et applications.
209 Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications.
245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de **C**. Exemples et applications.