À propos du groupe $\mathcal{O}(p,q)$.

Soient deux entiers p, q dont la somme vaut n. $\mathcal{O}(p,q) \subset GL_n(\mathbf{R})$ désigne le groupe des isométries de la forme quadratique standard sur $\mathbf{R}^n$ de signature (p,q) :

$$\mathcal{O}(p,q) = \{M \in GL_{p+q}(\mathbf{R}),\ \ MI_{p,q}M^* = I_{p,q}\}$$

où $I_{p,q}$ désigne la matrice :

$$I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Théorème. *Il existe un homéomorphisme :*

$$\mathcal{O}(p,q) \cong \mathcal{O}(p) \times \mathcal{O}(q) \times \mathbf{R}^{pq}.$$

Preuve. La preuve peut être vue comme une application de la décomposition polaire sur $GL_n(\mathbf{R})$.

Étape 1. $\mathcal{O}(p,q)$ est stable par transposition et la décomposition polaire y est interne.

Soit $M \in \mathcal{O}(p,q)$. Puisqu'une matrice commute avec son inverse, on a :

$${}^tMI_{p,q}M = I_{p,q} \iff ({}^tMI_{p,q})(MI_{p,q}) = I_n \iff (MI_{p,q})({}^tMI_{p,q}) = I_n \iff MI_{p,q}{}^tM = I_{p+q}$$

donc ${}^tM \in \mathcal{O}(p,q)$. Écrivons maintenant $M = OS$ où $O \in \mathcal{O}(n)$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Il s'agit de montrer que O et S sont dans $\mathcal{O}(p,q)$. On va montrer que S l'est, ce qui est suffisant. Par le théorème spectral et l'unicité de la racine carrée, on peut écrire :

$$S = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})P^{-1}$$

où $P \in GL_n(\mathbf{R})$ et les $\lambda_i > 0$. En outre, comme $S^2 = {}^tMM \in \mathcal{O}(p,q)$, il est facile de voir que :

$$S^2 I_{p,q} = I_{p,q}S^{-2} \Longrightarrow L(S^2)I_{p,q} = I_{p,q}L(S^{-2})$$

pour tout polynôme $L \in \mathbf{R}[X]$. En particulier, si L est le polynôme interpolateur de Lagrange vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} \ \text{ et } \ L(\lambda_i^{-1}) = \left(\sqrt{\lambda_i}\right)^{-1}$$

on a $S = L(S^2)$ et $S^{-1} = L(S^{-2})$ et la conclusion suit.

Conclusion provisoire. Comme la décomposition polaire induit un homéomorphisme de $GL_n(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{O}(n) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, on en déduit par restriction que

$$\mathcal{O}(p,q) \cong \big(\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n)\big) \times \big(\mathcal{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})\big). \tag{1}$$

Étape 2. Étude de l'intersection $\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n)$.

Soit $M \in \mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n)$. Puisque $I_{p,q}M = MI_{p,q}$, les sous-espaces propres de $I_{p,q}$ sont stables par M qui s'écrit alors par blocs sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} M_p & 0 \\ 0 & M_q \end{pmatrix}.$$

Et comme ${}^tMM = I_n$, on trouve que $M_p \in \mathcal{O}(p)$ et $M_q \in \mathcal{O}(q)$. D'où l'homéomorphisme :

$$\mathcal{O}(p,q) \cap \mathcal{O}(n) \cong \mathcal{O}(p) \times \mathcal{O}(q). \tag{2}$$

Étape 3. Étude de l'intersection $\mathcal{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Introduisons l'ensemble

$$\mathcal{U}(p,q) := \big\{ N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}),\ \ NI_{p,q} + I_{p,q}N = 0 \big\}.$$

On va montrer que exp réalise un homéomorphisme[1] :

$$\exp\, : \mathcal{U}(p,q) \cap \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R}). \tag{3}$$

- D'abord $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est continue et injective car si $\exp(A) = \exp(A')$, en écrivant :

  $$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1} \Longrightarrow \exp(A) = P\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P^{-1} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$$

  on obtient en considérant le polynôme interpolateur de Lagrange L tel que $L(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

  $$L(\exp(A')) = L(\exp(A)) = A$$

  et comme A' commute avec $L(\exp(A'))$, on vient de prouver que A et A' commutent. Ces deux matrices sont donc co-diagonalisables : il existe P_0 inversible telle que :

  $$A = P_0\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P_0^{-1} \ \text{ et } \ A' = P_0\,\mathrm{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)P_0^{-1}.$$

  En passant à l'exponentielle, on trouve que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}$, d'où $\lambda_i = \lambda'_i$ et $A = A'$.

- Si $N \in \mathcal{U}(p,q) \cap \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, alors $\exp(N) \in \mathcal{O}(p,q)$ car

  $$I_{p,q}N = -NI_{p,q} \Longrightarrow I_{p,q}\exp(N) = \exp(-N)I_{p,q} \Longrightarrow {}^t\exp(N)I_{p,q}\exp(N) = I_{p,q}.$$

- Enfin, si $M \in \mathcal{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ on peut écrire pour une certaine matrice $P \in \mathcal{O}(n)$ et certains $\lambda_i > 0$:

  $$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}.$$

  Alors la matrice

  $$N = P\,\mathrm{diag}(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n)P^{-1}$$

  est bien définie, appartient à $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$, dépend continûment de M et vérifie $\exp(N) = M$. Il reste à voir que $N \in \mathcal{U}(p,q)$. Une fois encore, comme :

  $$MI_{p,q} = I_{p,q}M^{-1} \Longrightarrow L(M)I_{p,q} = I_{p,q}L(M^{-1})$$

  pour tout polynôme $L \in \mathbf{R}[X]$, il suffit de trouver L tel que $N = L(M)$ et $-N = L(M^{-1})$. Le polynôme d'interpolation de Lagrange vérifiant :

  $$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \ L(\lambda_i) = \ln \lambda_i \ \text{ et } \ L(\lambda_i^{-1}) = -\ln \lambda_i$$

  convient.

[1] On montre en fait incidemment que $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est un homéomorphisme.

Finalement, un calcul par blocs montre que

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(p,q) \cap \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) \Longrightarrow UI_{p,q} + I_{p,q}U = 2\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -D \end{pmatrix}.$$

Et donc

$$\mathcal{U}(p,q) \cap \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix},\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{R}) \right\}$$

D'où l'homéomorphisme :

$$\mathcal{U}(p,q) \cap \mathscr{S}_n(R) \cong \mathbf{R}^{pq} \tag{4}$$

Conclusion. Le théorème découle de (1), (2), (3) et (4). □

Références. Zavidovique et H2G2

170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.