Le théorème de structure des polynômes symétriques.

On se place dans un anneau intègre A et l'on définit d'abord plusieurs notions :

(1) Le **poids** du monôme $aX_1^{i_1}\dots X_m^{i_m} \in A[X_1,\dots,X_m]$ est $i_1+2i_2+\dots mi_m$. Le poids d'un polynôme est le maximum des poids des monômes.

(2) Dans $A[t_1,\dots,t_n]$, la **k-ème fonction symétrique élémentaire** est la fonction :

$$s_k(t_1,\dots,t_n) = \sum_{1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le i_n} t_{i_1}t_{i_2}\dots t_{i_k}.$$

(3) Pour $j=0,\dots,n-1$, s_{n-j} est le coefficient devant le monôme d'ordre j du **polynôme général de degré** n :

$$F(X) = (X-t_1)(X-t_2)\dots(X-t_n) \in A[t_1,\dots,t_n][X].$$

(4) On appelle **polynôme symétrique** de $A[t_1,\dots,t_n]$ tout polynôme invariant par l'action de $\mathfrak{S}_n$ par permutation des indéterminés. L'ensemble des polynômes symétriques est noté $\mathcal{S}$ et forme un sous-anneau de $A[t_1,\dots,t_n]$.

Comme les fonctions symétriques élémentaires sont des polynômes symétrique, $\mathcal{S}$ contient le sous-anneau qu'elles engendrent. En fait, la réciproque est vraie.

Théorème. *Tout polynôme symétrique à coefficients dans A est un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires. Autrement dit,*

$$\mathcal{S} = A[s_1,\dots,s_n].$$

Preuve. Soit P un polynôme symétrique en les indéterminés $t_1,\dots,t_n$. On va montrer par double récurrence sur n et sur $d=\deg P$ le fait suivant :

$\mathscr{P}(n,d)$: Il existe un polynôme $Q\in A[X_1,\dots,X_n]$ de poids $\le d$ tel que :

$$P(t_1,\dots,t_n) = Q(s_1(t_1,\dots,t_n),\dots,s_n(t_1,\dots,t_n)).$$

On va montrer par récurrence sur n la proposition « $\forall \tilde{d}\in\mathbf{N},\ \mathscr{P}(n,\tilde{d})$ ».

Pour $n=1$, il n'y a rien à montrer puisque $s_1=t_1$.

Soit $n\ge 2$. On suppose « $\forall \tilde{d},\ \mathscr{P}(n-1,\tilde{d})$ ». On montre par récurrence sur $d\in\mathbf{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n,d)$. Pour $d=0$, $\mathscr{P}(n,0)$ est toujours vraie. Soit $d\ge 1$, on suppose $\mathscr{P}(n,d-1)$.

Soit $P\in A[t_1,\dots,t_n]$ un polynôme symétrique de degré d. Alors, en regardant le polynôme :

$$\tilde{P}(t_1,\dots,t_{n-1}) = P(t_1,\dots,t_{n-1},0)$$

on déduit par hypothèse de récurrence « $\forall \tilde{d},\ \mathscr{P}(n-1,\tilde{d})$ », l'existence d'un polynôme $Q\in A[X_1,\dots,X_{n-1}]$ de poids $\le d$ qui vérifie :

$$P(t_1,\dots,t_{n-1},0) = Q(s_1(t_1,\dots,t_{n-1}),\dots,s_{n-1}(t_1,\dots,t_{n-1})).$$

Comme $s_i(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = s_i(t_1, \dots, t_{n-1})$ pour $i = 1, \dots, n-1$ on peut même se permettre d'écrire :

$$P(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = Q(s_1(t_1, \dots, t_{n-1}, 0), \dots, s_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}, 0)).$$

On pose :

$$P_1(t_1, \dots, t_n) = P(t_1, \dots, t_n) - Q(s_1(t_1, \dots, t_n), \dots, s_{n-1}(t_1, \dots, t_n)).$$

On sait déjà que Q est de poids $\leq d$ donc $Q(s_1(t_1, \dots, t_n), \dots, s_{n-1}(t_1, \dots, t_n))$ est de degré $\leq d$. Ainsi, P_1 est un polynôme symétrique de degré $\leq d$.

Par construction, $P_1(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = 0$ donc t_n divise P_1 et par symétrie, il en est de même pour tous les t_i. En fait, on peut même dire que $t_1 \dots t_n = s_n(t_1, \dots, t_n)$ divise P_1. Autrement dit, il existe $P_2 \in A[t_1, \dots, t_n]$ tel que :

$$P(t_1, \dots, t_n) = P_2(t_1, \dots, t_n)s_n(t_1, \dots, t_n) + Q(s_1(t_1, \dots, t_n), \dots, s_{n-1}(t_1, \dots, t_n)).$$

On voit que P_2 est symétrique, de degré $\leq d - n < d$. Par hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n, \tilde{d})$ pour $\tilde{d} < d$, il existe $Q_2 \in A[X_1, \dots, X_n]$ de poids $\leq d - n$ tel que :

$$P_2(t_1, \dots, t_n) = Q_2(s_1(t_1, \dots, t_n), \dots, s_n(t_1, \dots, t_n)).$$

On peut conclure :

$$P(t_1, \dots, t_n) = Q_2(s_1, \dots, s_n)s_n + Q(s_1, \dots, s_{n-1})$$

et le polynôme

$$Q(X_1, \dots, X_n)X_n + Q(X_1, \dots, X_{n-1})$$

est bien de poids $\leq d$.

On a montré $\mathscr{P}(n, d)$ donc par récurrence $\ll \forall d, \ \mathscr{P}(n, d) \gg$. Puis par récurrence $\ll \forall n, \ \forall d, \ \mathscr{P}(n, d) \gg$. □

En ajoutant le concept d'ordre dans la preuve, on peut ensuite montrer que le polynôme Q est unique.

Référence.

A. Jeanneret, D. Lines, *Invitation à l'Algèbre*
E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, tome 1*

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
142 Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.
144 Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications