Des bases presque orthogonales et des opérateurs compacts.

Théorème (Paley, Wiener, Birkhoff, Rota, Nagy, Lax)**.** *Soit H un espace de Hilbert muni d'une base orthonormée $\{x_n\}$. Soit $\{y_n\}$ une famille d'éléments de H « proches »des $\{x_n\}$ au sens où :*

$$\sum \|x_n - y_n\|^2 < +\infty.$$

Si aucun y_i n'est dans l'adhérence du sous-espace engendré par les autres y_n, alors $\{y_n\}$ est une famille totale. En particulier, si les y_n sont orthonormés, alors $\{y_n\}$ est une base hilbertienne.

Preuve. On va commencer par le résultat de base sur les opérateurs compacts.

Théorème. *Soit $C : X \to X$ un opérateur compact d'un espace de Banach. On note $T = I - C$.*

(i) Si $(C_n)_n$ est une suite d'opérateurs compacts qui converge en norme d'opérateur vers un opérateur C. Alors C est compact.

(ii) $\mathrm{Im}(T)$ *est fermée.*

(iii) (Fredholm) Si T est injectif alors T est surjectif.

Preuve. (*i*) Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ tel que $\|C_n - C\| < \varepsilon$. Puisque l'image de la boule unité par C_n peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ε, l'image de la boule unité par C peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayons 2ε.

(*ii*) Soit $(y_k)_k$ une suite de points de $\mathrm{Im}\, T$ qui converge vers $y \in X$:

$$\lim_{k \to +\infty} y_k = y, \quad y_k = Tx_k.$$

On note $d_k = \mathrm{dist}(x_k, \mathrm{Ker}\, T)$ et on montre que la suite des $(d_k)_k$ est bornée. Pour cela, on considère une suite $(z_k)_k$ de points de $\mathrm{Ker}\, T$ telle que $|w_k| := |x_k - z_k| < 2d_k$. Clairement,

$$Tw_k = Tx_k - Tz_k = y_k.$$

Si la suite $(d_k)_k$ n'était pas bornée, alors $u_k := w_k/d_k$ vérifie $|u_k| < 2$ et $Tu_k = y_k/d_k \to 0$ puisque $(y_k)_k$ est bornée. Par définition de T compacité de C et continuité de T on a quitte à extraire :

$$u_k - Cu_k = Tu_k \to 0 \implies u_k \to u \in \mathrm{Ker}\, T.$$

C'est contradictoire avec $|u_k - u| \geq 1$ qui découle de la définition de u_k. Donc $(d_k)_k$ est bornée, toute comme $(w_k)_k$. Mais alors, on peut extraire une sous-suite de $(Cw_k)_k$ convergente et quitte à extraire :

$$w_k - Cw_k = y_k \to y \implies w_k \to w.$$

Par continuité de T, on a :

$$w - Cw = Tw = y.$$

(*iii*) On suppose que T est injectif et on considère la suite :

$$X_0 := X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N},\ X_{n+1} := TX_n = T^{n+1}X \subset X_n.$$

On veut montrer que $X_1 = X$ donc on suppose le contraire. Par injectivité de T, les inclusions sont strictes. De plus comme :

$$T^n = (I - C)^n = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k C^k$$

le premier point montre que l'image de T^n est fermée pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi par le lemme super important ci-dessous, pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $x_k \in X_k$ tel que :

$$|x_k| = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(x_k, X_{k+1}) \geq \frac{1}{2}.$$

Alors, si $m < n$:

$$Cx_m - Cx_n = x_m - (Tx_m + x_n - Tx_n) \in x_m + X_{m+1}$$

et $|Cx_m - Cx_n| \geq 1/2$. C'est contradictoire avec la compacité de C car alors $(Cx_n)_n$ ne contient aucune sous-suite convergente.

□

On peut maintenant prouver le théorème à proprement parler. Prenons $u \in H$ et écrivons :

$$u = \sum a_n x_n, \quad a_n = \langle x_n, u \rangle.$$

On définit ensuite l'application linéaire $B : H \to H$ définit par :

$$Bu = \sum a_n(y_n - x_n) + \sum a_n x_n = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n y_n =: \sum a_n y_n.$$

Il n'y a pas de problème de définition puisque :

$$\sum |a_n| \|y_n - x_n\| \leq \left(\sum |a_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum \|y_n - x_n\|^2\right)^{1/2} \leq C\|u\| < +\infty.$$

On vient même de montrer que $B - I$ est une application linéaire continue. On prétend que $B - I$ est un opérateur compact. En effet, on peut écrire $B - I$ comme la limite (en norme d'opérateur) des opérateurs :

$$G_N : u \mapsto G_N u := \sum_{n=0}^{N} a_n(y_n - x_n)$$

qui sont compacts puisque leur image est de dimension finie. Comme $B = I + (B - I)$, il suffit de montrer que B est injectif pour conclure que B est surjectif. C'est évident car

$$Bu = 0 \ \Rightarrow \ \sum a_n y_n = 0 \ \Rightarrow \ \forall n \in \mathbf{N},\ a_n = 0 \ \ i.e \ \ u = 0$$

par l'hypothèse d'indépendance des y_n. □

Lemme (Super important)**.** *Soit V un espace vectoriel normé et $W \subset V$ un sous-espace vectoriel strict fermé de V. Alors il existe $v \in V$ tel que $\|v\| = 1$ et $d(v, W) \geq 1/2$.*

Preuve. On choisit $y \in V \setminus W$ et $w \in W$ tel que $\|y - w\| \leq 2d(y, W)$. On vérifie que $v := \dfrac{y - w}{\|y - w\|}$ convient. $\square$

Référence. P. D. Lax, *Functional Analysis*

203 Utilisation de la notion de compacité.
208 Espaces vectoriels normés, applications linéaire continues. Exemples.
213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.