Le théorème de relèvement continu

Version semi-périmée.

Théorème (Relèvement continu)**.** *Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $\theta_0 \in \mathbf{R}$. On considère $\gamma : [a, b] \to \mathbf{U}$ une application continue telle que*

$$\gamma(a) = e^{i\theta_0}.$$

Alors il existe une unique application continue $\theta : [a, b] \to \mathbf{R}$ envoyant a sur θ_0 telle que

$$\forall t \in [a, b], \;\; \gamma(t) = e^{i\theta(t)}. \tag{1}$$

Une application continue $[a, b] \to \mathbf{U}$ vérifiant (1) s'appelle un relèvement continu de γ. Le lemme suivant sera important :

Lemme 1. *Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{R}(\gamma)$. Alors la fonction $\theta_1 - \theta_2$ est une constante appartenant à $2\pi\mathbf{Z}$.*

Preuve. On a pour tout $t \in I$, $\theta_1(t) - \theta_2(t) \in 2\pi\mathbf{Z}$ par définition d'un relèvement. Puisque θ_1 et θ_2 sont des relèvements continus et que l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arcs, la conclusion est immédiate. □

En particulier, si on relève γ sur deux sous-intervalles de $[a, b]$ d'intersection non vide, il est possible de prolonger de façon unique chacun de ces relèvements à la réunion des deux sous-intervalles.

Preuve (du théorème de relèvement continu). L'unicité d'un tel relèvement découle du lemme 1[1]. Bien qu'il n'existe pas de fonction argument qui soit continue sur tout $\mathbf{C}^*$, il est facile d'en construire une sur n'importe quel plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_- e^{i\alpha}$. Cette remarque permet de construire pour tout $t \in I$ un relèvement local de γ restreint à un voisinage de t. La preuve consiste ensuite à globaliser la construction par connexité.

Étape 1. Soit $t \in I$. Par continuité de γ, il existe un intervalle ouvert $I_t \subset [a, b]$ contenant t et tel que $\gamma(I_t) \subset \mathbf{U} \setminus \{-\gamma(t)\}$. Sur le plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-\gamma(t)$, on définit une fonction argument continue $\Theta_{\gamma(t)} : \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-\gamma(t) \to \mathbf{R}$. $\Theta_{\gamma(t)} \circ \gamma$ est un relèvement continu de $\gamma|_{I_t}$.

Étape 2. On définit sur $[a, b]$ la relation $t \sim t'$ si et seulement s'il existe un sous intervalle de I contenant t et t' sur lequel γ se relève continûment[2]. Cette relation est clairement symétrique, elle est réflexive grâce à l'étape 1 et comme on peut prolonger les relèvements elle est aussi transitive. C'est donc une relation d'équivalence. De plus, toujours grâce à l'étape 1, il est facile de voir que les classes de $\sim$ sont ouvertes. Par connexité de $[a, b]$, il n'y a qu'une seule classe qui est $[a, b]$ tout entier. En particulier $a \sim b$ et le théorème est prouvé. □

[1] Puisque $\mathbf{R}$ est un revêtement de $\mathbf{U}$ via $\theta \mapsto e^{i\theta}$, c'est aussi un cas particulier du théorème d'unicité des relèvements en topologie algébrique, qui se prouve aussi par un argument de connexité !

[2] *i.e.* la restriction de γ à ce sous-intervalle admet un relèvement continu

Application : l'Antipodensatz de Borsuk

Definition 1 (Degré d'un lacet, d'une application)**.** *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}^*$ un lacet. On appelle degré de γ l'entier*

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

où θ est un relèvement quelconque de $\gamma/|\gamma|$. On définit le degré d'une application continue $f : \mathbf{U} \to \mathbf{C}^*$ comme le degré du lacet :

$$\tilde{f} : t \in [-\pi, \pi] \mapsto f(e^{it}).$$

Lemme 2 (Le degré est localement constant)**.** *Soient γ_1 et γ_2 deux lacets tracés sur $\mathbf{C}^*$. Si $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_\infty < \|\gamma_1\|_\infty$ alors γ_1 et γ_2 ont même degré.*

Preuve. La condition implique que $\|\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1\|_\infty < 1$. Donc le lacet γ_2/γ_1 est tracé dans le plan fendu $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-$ et est donc de degré nul. Et il est facile de voir que

$$\deg(\gamma_2/\gamma_1) = \deg(\gamma_2) - \deg(\gamma_1).$$

□

Théorème (Antipodensatz de Borsuk)**.** *Soit $g : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{R}^2$ une application continue. Alors il existe un point $\omega \in \mathbf{S}^2$ tel que $g(\omega) = g(-\omega)$.*

Preuve. On définit les applications continues $p : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{S}^2$ par :

$$\forall z \in \overline{\mathbf{D}}, \;\; p(z) = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), \sqrt{1 - \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2})$$

et $f : \overline{\mathbf{D}} \to \mathbf{R}^2$ par :

$$\forall z \in \overline{\mathbf{D}}, \;\; f(z) = g(p(z)) - g(-p(z)).$$

La restriction de p à $\mathbf{U}$ est impaire, tout comme celle de f. Avec les notations précédentes, cela signifie que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $\tilde{f}(t + \pi) = -\tilde{f}(t)$. Cela entraîne facilement que le degré de f est impair.
Si f ne s'annulait pas sur $\overline{\mathbf{D}}$, alors considérons l'homotopie

$$H(s,t) := f(se^{it})/|f(se^{it})|$$

qui est une fonction continue en s et en t. Ainsi, $s \mapsto \deg(H(s,\cdot))$ est continue. Comme elle est à valeurs dans $\mathbf{Z}$ elle est constante. Or, $H(0,\cdot)$ est de degré nul et il en est de même pour $H(1,\cdot) = \tilde{f}$. Mais 0 n'est pas impair, d'où contradiction. □

Remarque. Les mêmes arguments conduisent au théorème de Brouwer pour le disque fermé $\overline{\mathbf{D}}$: il suffit de voir qu'il n'existe pas de retraction de $\overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{U}$ (ou de façon équivalente que l'identité sur $\mathbf{U}$, qui est impaire, ne peut pas se prolonger en une fonction continue qui envoie $\overline{\mathbf{D}}$ sur $\mathbf{U}$).

Je ne connais pas de référence précise pour ce développement : il s'agit d'une adaptation d'un polycopié de cours de N. Tosel. Cependant, on trouve un théorème un peu différent mais dans un cadre peut être plus adapté à l'agrégation dans *Analyse fonctionnelle* de S. Gonnord et N. Tosel.