Le théorème de Riesz-Thorin.

Il me semble qu'il y a des subtilités pas toujours détaillées dans les livres. En plus, je ne connais pas d'application simple (mais il y a des applications importantes : cf. Linares, Ponce, Introduction to Nonlinear Dispersive Equations).

Théorème (Riesz-Thorin)**.** *Soient (X,μ) et (Y,ν) des espaces mesurés et $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ dans $[1,\infty]$. On se donne une application linéaire :*

$$T : L^{p_i}(X) \to L^{q_i}(Y)$$

continue pour $i \in \{0,1\}$ avec pour normes respectives M_0 et M_1. Pour $a \in (0,1)$, on considère p_a et q_a dans $[1,\infty]$ tels que :

$$\frac{1}{p(a)} = \frac{1-a}{p_0} + \frac{a}{p_1} \quad \textit{et} \quad \frac{1}{q(a)} = \frac{1-a}{q_0} + \frac{a}{q_1}.$$

Alors T est une application linéaire continue de $L^{p(a)}(X) \to L^{q(a)}(Y)$ de norme M_a telle que :

$$M_a \leq M_0^{1-a} M_1^a.$$

On montre d'abord le théorème dit des *trois droites*.

Théorème (Hadamard)**.** *Soit ϕ une fonction holomorphe bornée sur la bande $\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$. On note pour $a \in [0,1]$:*

$$N(a) := \sup_\eta |\phi(a+i\eta)|$$

Alors

$$N(a) \leq N(0)^{1-a} N(1)^a.$$

Preuve. On suppose que $N(0)$ et $N(1)$ sont non nuls. Soit $c = \log N(0)/N(1)$. La fonction $z \mapsto \phi(z)e^{cz}$ bornée dans la bande $\{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ et son module est inférieur à $N(0)$ lorsque $\operatorname{Re} z = 0$ ou $\operatorname{Re} z = 1$. Par le principe du maximum :

$$|\phi(a+i\eta)|e^{ca} \leq N(0)$$

et le résultat suit de la définition de c. □

Preuve. (Riesz-Thorin). Pour $p \in [1,\infty]$ on notera $p' \in [1,\infty]$ tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Prenons $p(a)$ et $q(a)$ comme dans l'énoncé et $f \in L^{p(a)}$. Notons que T est bien défini sur $L^{p_0}(X) \cap L^{p_1}(Y) \to L^{q_0}(Y) \cap L^{q_1}(Y)$ donc $T : L^{p(a)}(X) \to L^{q(a)}(Y)$ l'est aussi.

On veut majorer la norme $M_a \in \overline{\mathbf{R}_+}$ de $T : L^{p(a)}(X) \to L^{q(a)}(Y)$. Par dualité :

$$M_a = \sup_{\|f\|_{L^p}=1,\ \|h\|_{L^q=1}} |\langle h, Tf\rangle|.$$

Soient donc $f = |f|e^{i\alpha} \in L^p(X)$ et $h = |h|e^{i\beta} \in L^{q'}(Y)$ de norme 1. On pose pour $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$:

$$f_z = |f|^{p(a)/p(z)}e^{i\alpha} \quad \text{et} \quad h_z = |h|^{q'(a)/q'(a)}e^{i\beta}.$$

La fonction :

$$\phi(z) = \langle h_z, Tf_z\rangle = \int_Y h_z(y)\, Tf_z(y)dy$$

est bien définie et holomorphe sur $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ comme un calcul direct le montrerait. Notons

$$N(a) = \sup_{\operatorname{Re} z = a} |\phi(z)|.$$

On va majorer $N(0)$ et $N(1)$: soit $z = i\eta$, $\eta \in \mathbf{R}$, alors par définition :

$$\frac{p(a)}{p(z)} = \frac{p(a)}{p_0} + \text{imag.} \quad \text{et} \quad \frac{q'(a)}{q'(z)} = \frac{q'(a)}{q'_0} + \text{imag.}.$$

Ainsi :

$$|f_z|^{p_0} = |f|^{\operatorname{Re}\left(p_0 \times p(a)/p(z)\right)} = |f|^{p(a)}$$

de sorte que :

$$\|f_z\|_{p_0}^{p_0} = \|f\|_{L^{p(a)}}^{p(a)} = 1 \quad \text{et} \quad \|h_z\|_{L^{q'_0}}^{q'_0} = \|h\|_{L^{q'(a)}}^{q'(a)} = 1.$$

L'inégalité de Hölder permet de conclure :

$$|\phi(z)| \leq \|h_z\|_{L^{q'_0}} \|Tf_z\|_{L^{q_0}} \leq M_0.$$

Finalement $N(0) \leq M_0$ et par un raisonnement analogue, $N(1) \leq M_1$. La théorème résulte alors du lemme des trois droites de Hadamard appliqué à ϕ :

$$|\phi(a)| \leq N(a) \leq M_0^{1-a} M_1^a$$

et comme $f_a = f$ et $h_a = h$, on a le résultat. □

TOUT EST FAUX

Référence. P. D. Lax, *Functional Analysis*