Solutions asymptotiques pour l'équation de Schrödinger avec nonlinéarité quadratique

Antoine Diez
École Normale Supérieure de Rennes

Sous la direction de Corentin Audiard
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paris

19 Mai 2015 - 19 Juin 2015

Rapport de stage de Licence 3, réalisé à l'UPMC, Laboratoire Jacques-Louis Lions (Paris) du 19 mai 2015 au 19 juin 2015 sous la direction de Corentin Audiard.

Introduction

Ce texte présente quelques aspects du comportement asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t u + \Delta u = f(u, \bar{u})$$

lorsque f est une nonlinéarité quadratique (en particulier u^2 et $|u|u$). Cette équation apparait dans l'étude de nombreux phénomènes ondulatoires, en mécanique des fluides ou lors de la propagation d'ondes électromagnétiques par exemple.

La première section explore divers résultats d'analyse fonctionnelle qui, sans être directement liés au sujet, seront régulièrement utiles dans la suite.

Dans la deuxième section, on cherche à résoudre localement l'équation de Schrödinger quadratique par une méthode élémentaire de point fixe. Ce procédé est toutefois fortement dépendant de l'espace fonctionnel dans lequel on se place : relativement simple dans certains espaces de Sobolev H^s, il nécessite l'introduction d'outils plus sophistiqués (estimations de Strichartz) lorsqu'on travaille dans les espaces d'intérêt L^2 ou H^1.

La question de l'existence globale des solutions puis de leur comportement asymptotique fait l'objet des deux dernières sections. La plupart des résultat d'existence globale sont des conséquences plus ou moins directes du théorème de sortie de tout compact 2.12. Toutefois, préciser le comportement de la solution est une question plus délicate (encore ouverte dans certains cas) : selon la difficulté du problème, on ne donnera parfois que l'idée générale des preuves. Cette dernière section est basée sur le concept de *résonances* en espace et en temps et est fortement inspirée des articles [5] et [6].

Table des matières

Introduction **iii**

1 Quelques résultats préliminaires **1**
1.1 Théorème de Riesz-Thorin 1
1.2 Théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev 3
1.3 Espaces de Sobolev 4
1.4 Groupe $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ 6

2 Équation de Schrödinger avec nonlinéarité quadratique. Étude locale. **8**
2.1 Existence locale dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ lorsque $s > d/2$ 8
2.2 Scaling et lois de conservation 10
2.2.1 Scaling 10
2.2.2 Lois de conservation 11
2.3 Estimations de Strichartz 12
2.4 Existence locale dans L^2 en dimension $d = 3$ 17
2.5 Existence locale dans H^1 en dimension $d = 3$ 20
2.6 Explosion en temps fini 22

3 Existence globale et comportement asymptotique **22**
3.1 Preuve des lois de conservation (4) et (5) 22
3.2 Résultats d'existence globale 23
3.3 Numérologie et cas limites 24
3.4 Comportement asymptotique et scattering en dimension $d = 4$ 25

4 Problèmes de scattering pour l'équation de Schrödinger quadratique en dimension 3 **29**
4.1 Introduction 29
4.2 Résonances en temps et en espace 30
4.3 Pseudo-produit et théorème de Coifman-Meyer 31
4.4 Intégration par parties en temps et en espace 32
4.4.1 En temps 32
4.4.2 En espace 33
4.5 Un exemple avec perte de dérivées 34
4.5.1 Énergie 34
4.5.2 Résonance en temps 37
4.5.3 Dispersion et existence globale 38

Notations et conventions **42**

Références **43**

1 Quelques résultats préliminaires

Cette première section introduit quelques résultats utiles pour l'étude de l'équation de Schrödinger ; on les utilisera comme des outils courants tout au long de ce texte. La plupart des énoncés et des démonstrations proviennent des trois premiers chapitres de [3]. D'autres outils plus spécifiques seront introduits au fur et à mesure.

1.1 Théorème de Riesz-Thorin

Le théorème de Riesz-Thorin est un résultat d'interpolation d'opérateurs dans les espaces L^p. Dans un souci de relative exhaustivité, on en donne la preuve classique de Thorin que l'on peut retrouver dans [3] ou dans [2].

Théorème 1.1 (Riesz-Thorin). *Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ des espaces mesurés et $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ dans $[1, \infty]$. Soit T un opérateur linéaire continu de $L^{p_i}(X) \to L^{q_i}(Y)$ de norme M_i pour $i \in \{0, 1\}$. Alors T est un opérateur continu de $L^{p_\theta}(X) \to L^{q_\theta}(Y)$ de norme M_θ vérifiant :*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

avec $\theta \in (0, 1)$ et

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

La preuve du théorème de Riesz-Thorin est basée sur le résultat d'analyse complexe suivant.

Théorème 1.2 (des trois droites de Hadamard). *Soit F une fonction continue et bornée définie sur*

$$S = \{z = x + iy,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

et qui est holomorphe à l'intérieur de S. Si pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|F(iy)| \leq M_0 \quad \textit{et} \quad |F(1 + iy)| \leq M_1$$

alors pour tout $z = x + iy \in S$,

$$|F(x + iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x.$$

Preuve. Quitte à considérer la fonction $z \mapsto F(z)/M_0^{1-x} M_1^x$, on peut supposer que $M_0 = M_1 = 1$ et que pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$|F(iy)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |F(1 + iy)| \leq 1.$$

Montrons alors que $|F(z)| \leq 1$ pour tout $z \in S$. Il suffit pour cela de montrer que

$$\lim_{|y| \to +\infty} F(x + iy) = 0$$

uniformément en $0 \leq x \leq 1$. Le résultat découlera alors du principe du maximum. On considère la suite de fonctions

$$F_n : z \mapsto F(z) e^{(z^2-1)/n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors, puisque F est bornée sur S :

$$\begin{aligned} |F_n(z)| &= |F(x+iy)|e^{-y^2/n}e^{(x^2-1)/n} \\ &\leq |F(x+iy)|e^{-y^2/n} \underset{|y|\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

uniformément en $0 \leq x \leq 1$. Et comme $|F_n(iy)| \leq 1$ et $|F_n(1+iy)| \leq 1$, le principe du maximum montre que $|F_n(z)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient le résultat en faisant tendre $n \to +\infty$. □

Preuve du théorème de Riesz-Thorin. Par caractérisation de la norme par dualité, on a pour $h \in L^q(Y)$:

$$\|h\|_q = \sup\{\langle h, g\rangle,\ \|g\|_{q'} = 1\}$$

où on note

$$\langle h, g\rangle = \int_Y h(y)g(y)d\nu(y).$$

Et donc

$$M_\theta = \sup\{|\langle Tf, g\rangle|,\ \|f\|_{p_\theta} = \|g\|_{q'_\theta} = 1\}.$$

Soient donc $f \in L^{p_\theta}(X)$ et $g \in L^{q'_\theta}(Y)$. Par densité des fonctions étagées dans les L^p, on peut supposer que f et g s'écrivent :

$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{A_j}(x) \quad \text{et} \quad g(y) = \sum_{k=1}^n b_k \mathbf{1}_{B_k}(y)$$

où les A_j et les B_k sont deux à deux disjoints. Pour $0 \leq \Re(z) \leq 1$, on définit :

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}$$

et

$$f_z(x) = |f(x)|^{p_\theta/p(z)} f(x)/|f(x)| = \sum_{j=1}^m |a_j|^{p_\theta/p(z)} e^{i\arg(a_j)} \mathbf{1}_{A_j}(x)$$

$$g_z(y) = |g(y)|^{q'_\theta/q'(z)} g(y)/|g(y)| = \sum_{k=1}^n |b_k|^{q'_\theta/q'(z)} e^{i\arg(b_k)} \mathbf{1}_{B_k}(y).$$

En particulier, $f_z \in L^{p_j}(X)$ et $g_z \in L^{q'_j}$ pour $j = 0, 1$. On peut donc définir la fonction :

$$F : z \mapsto \langle Tf_z, g_z\rangle = \sum_{j,k} |a_j|^{p_\theta/p(z)} |b_k|^{q'_\theta/q'(z)} e^{i\arg(a_j)+i\arg(b_k)} \int_{B_k} T(\mathbf{1}_{A_j}) d\nu$$

qui est bornée, continue sur $0 \leq \Re(z) \leq 1$ et holomorphe à l'intérieur. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\|f_{it}\|_{p_0} = \||f|^{p_\theta/p_0}\|_{p_0} = \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta/p_0} = 1$$

et

$$\|f_{1+it}\|_{p_1} = \||f|^{p_\theta/p_1}\|_{p_1} = \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta/p_1} = 1.$$

De même, $\|g_{it}\|_{q_0'} = \|g_{1+it}\|_{q_1'} = 1$. Et par hypothèse,

$$|F(it)| \leq \|Tf_{it}\|_{q_0}\|g_{it}\|_{q_0'} \leq M_0$$

et

$$|F(1+it)| \leq \|Tf_{1+it}\|_{q_1}\|g_{1+it}\|_{q_1'} \leq M_1.$$

Puisque $f_\theta = f$ et $g_\theta = g$, alors $F(\theta) = \langle Tf, g\rangle$ et par le théorème des trois droites, on obtient :

$$|\langle Tf, g\rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

□

Proposition 1.3 (Inégalité de Young)**.** *Soient $p, q, r \in [1, +\infty]$ tels que :*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ avec $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\|g\|_q$.

Preuve. C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder à trois termes avec

$$\alpha = r,\ \beta = \frac{rp}{r-p},\ \gamma = \frac{rq}{r-q}.$$

On peut aussi démontrer cette inégalité avec le théorème de Riesz-Thorin 1.1. □

1.2 Théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev

Le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev est une conséquence d'un autre résultat d'interpolation (le théorème de Marcinkievicz) et exprime la continuité d'une certaine classe d'opérateurs (les potentiels de Riesz). Une preuve rigoureuse nécessiterait toutefois l'introduction de diverses notions qui ne seront pas utiles pour la suite ; on renvoie donc à [3] pour plus de détails.

Définition 1.4 (Potentiel de Riesz)**.** *Soit $0 < \alpha < d$. Le potentiel de Riesz d'ordre α d'une fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, noté $I_\alpha f$, est défini par :*

$$I_\alpha f(x) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(y)}{|x-y|^{d-\alpha}} dy = k_\alpha * f(x)$$

où $c_\alpha = \pi^{-d/2} 2^{-\alpha} \Gamma(d/2 - \alpha/2)/\Gamma(\alpha/2)$.

Théorème 1.5 (Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** *Soient $0 < \alpha < d$, $1 \leq p < q < \infty$ tels que :*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{d}.$$

1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors l'intégrale $I_\alpha f(x)$ converge absolument pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.*
2. *Si $p > 1$, alors I_α est continu de $L^p(\mathbb{R}^d) \to L^q(\mathbb{R}^d)$, i.e. il existe $c_{p,\alpha,d} > 0$ tel que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$:*

$$\|I_\alpha f\|_q \leq c_{p,\alpha,d}\|f\|_p.$$

1.3 Espaces de Sobolev

Dans la plupart des exemples présentés ici, on aura besoin d'introduire de nombreux espaces fonctionnels, généralement construits à partir des espaces L^p. À bien des égards, les espaces de Sobolev H^s et $W^{s,p}$ constituent un choix privilégié ; en particulier, ce sont des espaces de Banach dont la norme traduit à la fois la taille et la régularité d'une fonction.

Définition 1.6 (Espace de Sobolev H^s)**.** *Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev d'ordre s, noté $H^s(\mathbb{R}^d)$, par :*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \Lambda^s f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\},$$

avec la norme $\| \cdot \|_{H^s}$ définie par

$$\|f\|_{H^s} = \|\Lambda^s f\|_2.$$

$H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ défini pour $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$ par :

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^d} \Lambda^s f(\xi) \overline{\Lambda^s g(\xi)} d\xi.$$

Ponctuellement, on utilisera aussi *les espaces de Sobolev homogènes* dont la définition suit.

Définition 1.7 (Espace de Sobolev homogène)**.** *Soit $s \in \mathbb{R}$. On définit l'espace de Sobolev homogène d'ordre s, noté $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, par*

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \xi \mapsto |\xi|^s \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\},$$

avec la norme $\| \cdot \|_{\dot{H}^s}$ définie par

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{f}|^2(\xi) d\xi \right)^{1/2}.$$

Lorsque N est un entier, on peut définir les espaces de Sobolev sans utiliser la transformée de Fourier.

Théorème 1.8. *Si $N \in \mathbb{N}$ alors $H^N(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées (au sens des distributions) $\partial_x^\alpha f$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq N$. Dans ce cas, les normes $\| \cdot \|_{H^N(\mathbb{R}^d)}$ et $\sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial_x^\alpha f\|_2$ sont équivalentes.*

Preuve. C'est une conséquence de la formule $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (2i\pi\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ et des inégalités :

$$|\xi^\alpha| \leq |\xi|^N \leq (1 + |\xi|^2)^{N/2} \leq c \sum_{|\alpha| \leq N} |\xi^\alpha|.$$

$\square$

Lorsque N est un entier, on définit aussi les espaces de Sobolev $W^{N,p}$ comme l'espaces des fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dont les N premières dérivées (au sens des distributions) sont aussi dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Le théorème qui suit énonce une propriété utile d'injection des espaces H^s dans certains L^p.

Lemme 1.9. *Soit $s > d/2$. Si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$\|\hat{f}\|_1 \leq c_s \|f\|_{H^s}.$$

Preuve. C'est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{s/2} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s/2}} \\ &\leq \|\Lambda^s f\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s} \right)^{1/2} = c_s \|f\|_{H^s}.\end{aligned}$$

□

Théorème 1.10 (Injection)**.** *Si $s \in (0, d/2)$, alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$p = \frac{2d}{d-2s} \quad i.e. \quad s = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right).$$

De plus, pour $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s \in (0, d/2)$:

$$\|f\|_p \leq c_{d,s} \|D^s f\|_2 \leq c \|f\|_{H^s}$$

où on note

$$D^s f = ((2\pi|\xi|)^s \hat{f})^\vee.$$

Preuve. La deuxième inégalité est évidente, montrons la première. On pose :

$$D^s f = g \Leftrightarrow f = D^{-s} g = c_{d,s} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|\xi|^s}\hat{g}\right) = \frac{c_{d,s}}{|x|^{d-s}} * g.$$

Le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev 1.5 donne directement le résultat :

$$\|f\|_p = \left\| \frac{c_{d,s}}{|x|^{d-s}} * g \right\|_p \leq c_{d,s} \|g\|_2 = c \|D^s f\|_2.$$

□

Le théorème qui conclut ce paragraphe donne une condition suffisante pour que H^s soit une algèbre. Cette propriété aura son importance dans la suite lorsqu'on étudiera certaines nonlinéarités quadratiques (en particulier u^2).

Théorème 1.11. *Si $s > d/2$, alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre pour le produit de fonctions. Autrement dit, si $f, g \in h^s(\mathbb{R}^d)$, alors $fg \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec*

$$\|fg\|_{H^s} \leq c_s \|f\|_{H^s} \|g\|_{H^s}.$$

Preuve. On commence par montrer l'inégalité suivante pour tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$:

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^s[(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2} + (1+|\eta|^2)^{s/2}].$$

L'inégalité triangulaire et l'inégalité arithmético-géométrique donnent :

$$|\xi|^2 \leq 2|\xi-\eta|^2 + 2|\eta|^2.$$

On en déduit l'inégalité :

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^{s/2}(1+|\xi-\eta|^2+1+|\eta|^2)^{s/2}.$$

Or, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, $\|(x,y)\|_\alpha \geq \|(x,y)\|_\infty \geq \dfrac{|x|+|y|}{2}$. Ici, on obtient :

$$(1+|\xi|^2)^{s/2} \leq 2^{s/2}(1+|\xi-\eta|^2+1+|\eta|^2)^{s/2} \leq 2^{s/2}\cdot 2^{s/2}[(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}+(1+|\eta|^2)^{s/2}].$$

On peut maintenant calculer pour $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
|\Lambda^s(fg)| &= |(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{fg}(\xi)| \\
&= \left|(1+|\xi|^2)^{s/2}\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)d\eta\right| \\
&\leq 2^s\left|\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)d\eta + \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi-\eta)(1+|\eta|^2)\hat{g}(\eta)d\eta\right| \\
&= 2^s(|\Lambda^s f| * |\hat{g}| + |\hat{f}| * |\Lambda^s g|)
\end{aligned}$$

L'inégalité de Young 1.3 et le lemme 1.9 permettent de conclure lorsque $s > d/2$:

$$\|fg\|_{H^s} = \|\Lambda^s(fg)\|_2 \leq 2^s(\|f\|_{H^s}\|\hat{g}\|_1 + \|\hat{f}\|_1\|g\|_{H^s}) \leq c_s\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}.$$

□

1.4 Groupe $\{e^{it\Delta}\}_{t=-\infty}^{+\infty}$

Définition 1.12. *Soit $t \in \mathbb{R}$. L'opérateur $e^{it\Delta}$ est défini par :*

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad (e^{it\Delta}f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{-4\pi^2 it|\cdot|^2}\hat{f})(x) = \left(\frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi it)^{d/2}} * f\right)(x).$$

Dans cette définition, on a utilisé sans le mentionner le lemme suivant :

Lemme 1.13. *Pout tout nombre complexe z de partie réelle positive ou nulle, on a :*

$$\mathcal{F}(e^{-z|\cdot|^2})(\xi) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} e^{\frac{\pi^2}{z}\xi^2}.$$

Preuve. On admet la formule classique de la transformée de Fourier de la gaussienne :

$$\forall \alpha > 0, \quad ,\mathcal{F}(e^{-\alpha|\cdot|^2})(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2}.$$

Ainsi, les fonctions

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-zx^2} e^{-2i\pi x\cdot\xi} dx \quad \text{et} \quad z \mapsto \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{z}\xi^2}$$

sont holomorphes sur $\{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$ et coïncident sur la demi-droite $\mathbb{R}_+^*$. Elles coïncident donc sur $\{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$ (principe des zéros isolés). Lorsque z est imaginaire pur, on considère une suite de $\{z \in \mathbb{C},\ \Re(z) > 0\}$ qui converge vers z et on conclut par convergence dominée en revenant à la définition de la transformée de Fourier d'une distribution. □

Ce groupe d'opérateurs apparait naturellement lorsqu'on résout l'équation de Schrödinger homogène (cf. section suivante). Dans ce paragraphe, on démontre quelques propriétés de dérivation et de continuité que l'on utilisera beaucoup par la suite.

Proposition 1.14. *Soit $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$. $(t,x) \mapsto e^{it\Delta}u(t,x)$ est dérivable au sens des distributions selon t avec*

$$\partial_t \left(e^{it\Delta}u\right)(t,x) = ie^{it\Delta}\Delta u(t,x) + e^{it\Delta}\partial_t u(t,x).$$

Preuve. On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier selon x, on calcule au sens des distributions, $\mathcal{F}(\partial_t[e^{it\Delta}u])(t,\xi) = \partial_t \mathcal{F}(e^{it\Delta}u)(t,\xi)$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$. Alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \partial_t \mathcal{F}(e^{it\Delta}u), \varphi \right\rangle &= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} \hat{u}(t,\xi) e^{-4i\pi^2|\xi|^2 t} \partial_t \varphi \, d(t,\xi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} \hat{u}(t,\xi) \left(\partial_t(e^{-4i\pi^2|\xi|^2 t}\varphi) + 4i\pi^2|\xi|^2 e^{-4i\pi^2|\xi|^2 t}\varphi\right) d(t,\xi) \\
&= \left\langle e^{-4i\pi^2|\xi|^2 t}\widehat{\partial_t u}, \varphi \right\rangle + i\left\langle e^{-4i\pi^2|\xi|^2 t}\widehat{\Delta u}, \varphi\right\rangle \\
&= \left\langle \mathcal{F}(e^{it\Delta}\partial_t u + ie^{it\Delta}\Delta u), \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient alors :

$$\partial_t[e^{it\Delta}u(t,x)] = ie^{it\Delta}\Delta u(t,x) + e^{it\Delta}\partial_t u(t,x).$$

□

Proposition 1.15 (Inégalité de dispersion)**.** *Soient $t \neq 0$, $p' \in [1,2]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $e^{it\Delta} : L^{p'}(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ est continu avec*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{it\Delta}f\|_p \le c|t|^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_{p'}.$$

Preuve. On commence par montrer que $f \mapsto e^{it\Delta}f$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$. La formule de Parseval donne en effet :

$$\|e^{it\Delta}f\|_2 = \|e^{-4i\pi^2 t|\cdot|^2}\hat{f}\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

D'autre part, l'inégalité de Young 1.3 assure que :

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta}f\|_\infty &= \left\| \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi it)^{d/2}} * f \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi it)^{d/2}} \right\|_\infty \|f\|_1 \\ &\leq c|t|^{-d/2}\|f\|_1 \end{aligned}$$

On a donc montré la continuité de $e^{it\Delta}$ entre les espaces :

$$L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d).$$

La continuité de $e^{it\Delta} : L^{p'}(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ découle alors du théorème de Riesz-Thorin 1.1 avec

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leq (c|t|^{-d/2})^{1-\theta}\|f\|_{p'} = c|t|^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_{p'}$$

où

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p'} = \frac{\theta}{2} + 1 - \theta = \frac{1}{p} + 1 - \theta.$$

□

2 Équation de Schrödinger avec nonlinéarité quadratique. Étude locale.

2.1 Existence locale dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ lorsque $s > d/2$

Le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger avec nonlinéarité quadratique s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = u^2(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^s \end{array} \right. \tag{1}$$

Dans cette sous-partie, on considère $s > d/2$ de sorte que $H^s(\mathbb{R}^d)$ soit une algèbre. En particulier, il devient licite de faire agir $e^{it\Delta}$ sur u^2 lorsque $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Le théorème suivant en est une illustration.

Proposition 2.1 (Formule de Duhamel)**.** *Une fonction $u \in C([0,T], H^s)$ est une solution locale de* (1) *pour un certain $T > 0$ si et seulement si :*

$$u(t,\cdot) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}u^2(s,\cdot)ds. \tag{2}$$

L'équivalence entre (2) *et* (1) *est ici comprise au sens des distributions.*

PREUVE. En prenant la transformée de Fourier selon x de l'équation homogène, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{\partial_t u}(t,\xi) = \partial_t \hat{u}(t,\xi) = \widehat{i\Delta u}(t,\xi) = -4\pi^2 i|\xi|^2\hat{u}(t,\xi) \\ \hat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{array} \right.$$

La solution de cette équation différentielle en t et de paramètre ξ s'écrit :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi).$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de cette relation, on trouve finalement :

$$u(t,x) = \frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi it)^{d/2}} * u_0(x) = e^{it\Delta}u_0(x).$$

On pose alors $v(t,x)$ tel que pour u solution de (1) :

$$u(t,x) = (e^{it\Delta}v(t))(x).$$

Alors, en vertu de la proposition 1.14

$$\begin{aligned} -e^{it\Delta}\Delta v + ie^{it\Delta}\partial_t v + e^{it\Delta}\Delta v &= u^2 \\ i\partial_t v &= e^{-it\Delta}u^2 \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière relation entre 0 et t, on trouve en considérant la condition initiale de (1) :

$$iv(t,\cdot) = iu_0 + \int_0^t e^{-is\Delta}u^2(s)ds$$

Ce qui est équivalent à (2) en appliquant $e^{it\Delta}$ et en multipliant par $-i$.

Réciproquement, si on suppose que u est solution de (2), alors :

$$e^{-it\Delta}u(t) = u_0 - i\int_0^t e^{-is\Delta}u^2(s)ds.$$

La dérivée au sens des distributions et au sens classique coïncidant, la proposition 1.14 permet d'écrire :

$$\partial_t[e^{-it\Delta}u(t)] = -ie^{-it\Delta}\Delta u + e^{-it\Delta}\partial_t u = -ie^{-it\Delta}u^2(t).$$

Puisque u vérifie la condition initiale de (1), on retrouve bien (1) en appliquant l'opérateur $e^{it\Delta}$ à cette dernière relation et en multipliant par i. $\square$

Théorème 2.2. *Pour $s > d/2$, le problème de Cauchy* (1) *a une unique solution locale dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. On va appliquer le théorème de point fixe de Picard à l'équation sous forme intégrale (2). On note $X = C([0,T], H^s(\mathbb{R}^d))$, $a \geq \|u_0\|_X$ et $B_a = \{u \in X, \|u\|_X \leq a\}$ où T sera spécifié plus tard, $s > d/2$ de telle sorte que $H^s(\mathbb{R}^d)$ soit une algèbre et où on note :

$$\|u\|_X = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s}.$$

On considère alors l'application $\Phi : B_a \to B_a$ telle que pour tout $u \in B_a$ et tout $t \in [0,T]$,

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}u^2(s)ds.$$

On montre d'abord que Φ est bien définie : si $u \in B_a$ et $t \in [0,T]$, alors en vertu du théorème 1.11

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_{H^s} &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{H^s} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}u^2(s)ds \right\|_{H^s} \\
&\leq \|u_0\|_{H^s} + \int_0^t c_s \|u(s)\|^2_{H^s} ds \\
&\leq \|u_0\|_{H^s} + Tc_s a^2
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\Phi(u) \in B_a$ dès que $T \leq \dfrac{a - \|u_0\|_{H^s}}{c_s a^2}$. Il reste à montrer que Φ est contractante. On considère pour cela u_1 et $u_2 \in B_a$, on a pour tout $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\|_{H^s} &= \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(u_1^2(s) - u_2^2(s))ds \right\|_{H^s} \\
&\leq \int_0^t \|u_1^2(s) - u_2^2(s)\|_{H^s} ds \\
&\leq 2Tac_s \|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^s} \leq 2Tac_s \|u_1 - u_2\|_X
\end{aligned}$$

Ce qui montre que Φ est contractante dès que $T < \dfrac{1}{2ac_s}$. Comme H^s est complet, X muni de la norme $\| \cdot \|_X$ l'est aussi et on peut appliquer le théorème du point fixe de Picard à Φ, ce qui donne une unique solution (locale) à l'équation (2). $\square$

2.2 Scaling et lois de conservation

Dans la suite de cette partie, on s'intéressera au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = |u|u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{3}$$

Le résultat dans H^s présenté dans le paragraphe précédent n'est en général pas satisfaisant ; il est d'ailleurs plus délicat à obtenir pour cette nonlinéarité puisqu'à cause du module, $u \mapsto |u|u$ n'est en général pas une application continue de $H^s \to H^s$. On préfèrera à l'avenir travailler dans les espaces L^2 ou H^1. Ce choix est motivé par les deux observations qui font l'objet des paragraphes suivants.

2.2.1 Scaling

Certaines propriétés d'invariance de l'équation permettent de construire de nouvelles solutions à partir d'une solution u. L'objet de ce paragraphe est de montrer, au moins d'un point de vue heuristique, l'influence de l'espace dans lequel on travaille sur le comportement de cette nouvelle solution.

Si u est une solution de (3) alors

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^2 u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

est aussi une solution, associée à la condition initiale

$$u_\lambda^0(x) = \lambda^2 u_0(\lambda x).$$

Remarquons à ce stade que si u existe sur $[0,1)$ alors u_λ existe sur $[0, \frac{1}{\lambda^2})$, donc d'autant plus longtemps que λ est petit. Calculons la norme $\|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}^s}$, par définition :

$$\|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\widehat{u_\lambda}(t,\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}$$

et un calcul élémentaire montre que

$$\widehat{u_\lambda}(t,\xi) = \lambda^{2-d}\hat{u}\left(\lambda^2 t, \frac{\xi}{\lambda}\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda(t)\|_{\dot{H}^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} \lambda^{4-2d} \left|\hat{u}\left(\lambda^2 t, \frac{\xi}{\lambda}\right)\right|^2 d\xi\right)^{1/2} \\
&= \lambda^{s-\frac{d}{2}+2} \|u(\lambda^2 t)\|_{\dot{H}^s}.
\end{aligned}$$

En particulier, cette norme est invariante pour

$$s_c = \frac{d}{2} - 2.$$

D'un point de vue heuristique, la meilleure situation correspond au cas où $s > d/2 - 2$: lorsque $\lambda \to 0$, les normes de la condition initiale et de la solution sont d'autant plus petites que le temps d'existence est long. À l'inverse, lorsque $s < d/2 - 2$, la norme explose alors que le temps d'existence augmente.

2.2.2 Lois de conservation

H^1 est *l'espace d'énergie* au sens où c'est le plus petit espace de Sobolev dans lequel les lois de conservation suivantes sont vérifiées. On n'en donne ici qu'une preuve formelle. Une preuve rigoureuse de ces énoncés sera donnée dans la section suivante.

- En multipliant l'équation (3) par $\overline{u}$, et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, on obtient :

$$i\int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t u)\overline{u} + \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u)\overline{u} = \int_{\mathbb{R}^d} |u|^3. \quad (*)$$

Or, une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} (\Delta u)\overline{u} dx &= \sum_j \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \overline{u} dx \\
&= -\sum_j \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} dx = -\sum_j \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_j} \overline{\frac{\partial u}{\partial x_j}} dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2.
\end{aligned}$$

Donc en prenant la partie imaginaire de $(*)$, on obtient :

$$\Re\left(\int_{\mathbb{R}^d}(\partial_t u)\overline{u}\right) = 0.$$

En écrivant $u = u_1 + iu_2$, on trouve alors :

$$\Re((\partial_t u)\overline{u}) = (\partial_t u_1)u_1 + (\partial_t u_2)u_2 = \frac{1}{2}\partial_t|u|^2.$$

Finalement, on obtient la loi de conservation suivante :

$$\forall t, \quad \|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2. \tag{4}$$

- En multipliant l'équation par $\partial_t\overline{u}$ et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, obtient :

$$i\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_t u|^2 + \int_{\mathbb{R}^d}\Delta u\partial_t\overline{u} = \int_{\mathbb{R}^d}|u|u\partial_t\overline{u}. \quad (**)$$

Or, on montre comme précédemment que :

$$\Re(|u|u\partial_t\overline{u}) = \frac{1}{2}|u|\partial_t|u|^2 = |u|^2\partial_t|u| = \frac{1}{3}\partial_t|u|^3$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d}(\Delta u)\partial_t\overline{u} = -\frac{1}{2}\partial_t\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u|^2.$$

En prenant la partie réelle de $(**)$, on obtient la loi de conservation suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{3}|u|^3\right) = 0 \tag{5}$$

2.3 Estimations de Strichartz

Les preuves d'existence locale dans L^2 et dans H^1 reposent en grande partie sur les estimations de Strichartz. Ces inégalités expriment des résultats de continuité de différents opérateurs dans les espaces L^qL^p et L^2 et serviront dans la suite à vérifier les hypothèses du théorème de point fixe. Les preuves et énoncés de ce paragraphe sont largement inspirés de [4] et [3].

Définition 2.3 (Paire admissible en dimension d)**.** *On appelle paire admissible tout couple $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} 2 \le p < \frac{2d}{d-2} & si\ d \ge 3 \\ 2 \le p < \infty & si\ d = 2 \\ 2 \le p \le \infty & si\ d = 1 \end{cases}$$

et

$$\frac{2}{q} + \frac{d}{p} = \frac{d}{2}.$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$ on notera désormais toujours $p' \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Dans la suite on notera aussi $L^qL^p = L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}^d))$ l'espace muni de la norme :

$$\|g\|_{L^qL^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|g(t,\cdot)\|_p^q \, dt\right)^{1/q}, \quad \text{si } q < \infty$$

et

$$\|g\|_{L^\infty L^p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|g(t,\cdot)\|_p.$$

Théorème 2.4 (Estimations de Strichartz)**.** *Soit (p,q) une paire admissible. Soient $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{q'}L^{p'}$. On a :*

$$\|e^{it\Delta} f\|_{L^qL^p} \leq c\|f\|_2 \tag{6}$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta} g(s) ds \right\|_{L^qL^p} \leq c\|g\|_{L^{q'}L^{p'}} \tag{7}$$

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\Delta} g(t,\cdot) dt \right\|_2 \leq c\|g\|_{L^{q'}L^{p'}} \tag{8}$$

Corollaire 2.5. *Soient (p_0,q_0) et (p_1,q_1) deux paires admissibles. Pour tout $T > 0$, on a :*

$$\left(\int_0^T \| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s) ds\|_{p_1}^{q_1} dt\right)^{1/q_1} \leq c \left(\int_0^T \|g(t)\|_{p_0'}^{q_0'} dt\right)^{1/q_0'} \tag{9}$$

La preuve de ce théorème est basée sur le résultat très général suivant, que l'on démontre au préalable.

Lemme 2.6 (TT^*)**.** *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Soit $T : \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ un opérateur linéaire continu. On note $T^* : \mathcal{B}' \to \mathcal{H}$ son adjoint défini par :*

$$\forall x \in \mathcal{H},\, \forall g \in \mathcal{B}', \quad \langle Tx, g\rangle_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \langle x, T^*g\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Alors :

$$\|TT^*\| = \|T\|^2 = \|T^*\|^2.$$

Autrement dit, TT^* est continu si et seulement si T est continu si et seulement si T^* est continu.

Preuve. On commence par montrer que $\|T\| = \|T^*\|$. Par représentation de la norme par dualité, on a si $x \in \mathcal{H}$:

$$\|Tx\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|g\|_{\mathcal{B}'}=1} |\langle g, Tx\rangle_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}| = \sup_{\|g\|_{\mathcal{B}'}=1} |\langle T^*g, x\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|T^*\|\|x\|_{\mathcal{H}}$$

et si $h \in \mathcal{B}'$

$$\|T^*h\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle x, T^*h\rangle_{\mathcal{H}}| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} |\langle Tx, h\rangle_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}| \leq \|T\|\|h\|_{\mathcal{B}'}.$$

Ce qui montre que $\|T\| = \|T^*\|$. Montrons la dernière égalité : d'une part on a par composition,

$$\|TT^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}',\mathcal{B})} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{B})}\|T^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}',\mathcal{H})}$$

et d'autre part, si $x \in \mathcal{B}'$, alors :

$$\|T^*x\|_{\mathcal{H}}^2 = |\langle T^*x, T^*x\rangle_{\mathcal{H}}| = |\langle x, TT^*x\rangle_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}| \leq \|x\|_{\mathcal{B}'}\|TT^*x\|_{\mathcal{B}} \leq \|x\|_{\mathcal{B}'}^2\|TT^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}',\mathcal{B})}$$

ce qui montre que $\|TT^*\| = \|T^*\|^2$. □

Preuve du théorème 2.4. On va appliquer le lemme 2.6 avec :

$$T : \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^d) & \to & L^qL^p \\ f & \mapsto & e^{it\Delta}f \end{array} \right.$$

Identifions l'adjoint de T : si $g \in L^{q'}L^{p'}$, alors

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle_{L^qL^p,L^{q'}L^{p'}} &= \int_{\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}(e^{it\Delta}f)(x)\overline{g(t,x)}dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{i|x-y|^2/4t}}{(4\pi it)^{d/2}}f(y)dy\right)\overline{g(t,x)}dxdt \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{i|x-y|^2/4t}}{(4\pi it)^{d/2}}\overline{g(t,x)}dx\right)dydt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f(y)\overline{(e^{-it\Delta}g)(y,t)}dydt \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}f(y)\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it\Delta}g(y,t)dt}\,dy \\
&= \left\langle f, \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-it\Delta}g(t)dt\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

d'où le calcul de l'adjoint :

$$T^* : \left| \begin{array}{ccc} L^{q'}L^{p'}(\mathbb{R}^d) & \to & L^2(\mathbb{R}^d) \\ g & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-is\Delta}g(s)ds \end{array} \right.$$

Et donc :

$$TT^* : \left| \begin{array}{ccc} L^{q'}L^{p'}(\mathbb{R}^d) & \to & L^qL^p \\ g & \mapsto & \left[(t,x) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(t-s)\Delta}g(x,s)ds\right] \end{array} \right.$$

Le lemme 2.6 assure alors que (6), (7) et (8) sont équivalents, on se contentera donc de montrer (7).

L'inégalité de Minkowski et la proposition 1.15 donnent :

$$\begin{aligned}\left\|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta} g(\cdot,s)ds\right\|_p &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{i(t-s)\Delta} g(\cdot,s)\|_p ds \\ &\leq c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|t-s|^\alpha}\|g(\cdot,s)\|_{p'} ds\end{aligned}$$

où $\alpha = (d/2)(1/p' - 1/p)$. On conclut avec le théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev 1.5 en dimension 1 :

$$\left\|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds\right\|_{L^qL^p} \leq c\|I_{1-\alpha}(\|g(t,\cdot)\|_{p'})\|_q \leq c\|g\|_{L^{q'}L^{p'}}.$$

Tout ceci étant vrai lorsque :

$$\frac{1}{q'} = \frac{1}{q} - (1-\alpha) \quad \text{et} \quad 0 < 1-\alpha < 1$$

ce qui est équivalent à la définition de paire admissible 2.3. □

Preuve du corollaire 2.5.

Étape 1 : $g \mapsto \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds$ est continu de $L^{q_1'}L^{p_1'} \to L^{q_1}L^{p_1}$

Quitte à multiplier par une indicatrice, la même preuve que celle de (7) montre :

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds\right\|_{L^qL^p} \leq c\|g\|_{L^{q'}L^{p'}}.$$

De plus, on peut, sans changer la preuve, se placer dans l'espace $L^q([0,T], L^p(\mathbb{R}^d))$, noté aussi L^qL^p dans la suite (en considérant cette fois $t \in [0,T]$). Les estimations (7) et (8) et la caractérisation de la norme par dualité donnent alors :

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds\right\|_{L^{q_1}L^{p_1}} \leq c\|g\|_{L^{q_1'}L^{p_1'}}$$

Étape 2 : $g \mapsto \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds$ est continu de $L^{q_1'}L^{p_1'} \to L^\infty L^2$

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds\right\|_{L^\infty L^2} &= \sup_{t\in[0,T]} \left\|e^{it\Delta}\int_0^t e^{-is\Delta} g(s)ds\right\|_2 \\ &= \sup_{t\in[0,T]} \left\|\int_0^t e^{-is\Delta} g(s)ds\right\|_2 \leq c\|g\|_{L^{q_1'}L^{p_1'}}.\end{aligned}$$

Étape 3 : $g \mapsto \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds$ est continu de $L^1L^2 \to L^{q_1}L^{p_1}$

On note $\chi(t,s) = \mathbf{1}_{[0,t]}(s)$. Par caractérisation de la norme par dualité, on a si $g \in L^1L^2$:

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds \right\|_{L^{q_1}L^{p_1}} &= \sup_{\|h\|_{L^{q_1'}L^{p_1'}}=1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds \right) \overline{h(t,x)} dxdt \\
&= \sup_{\|h\|_{L^{q_1'}L^{p_1'}}=1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} g(s)\chi(t,s)\overline{h(t,x)} dsdxdt \\
&\underset{\text{Fubini}}{=} \sup_{\|h\|_{L^{q_1'}L^{p_1'}}=1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} g(s) \overline{\int_{\mathbb{R}} \chi(t,s) e^{i(s-t)\Delta} h(t,x)dtdxds} \\
&\leq \sup_{\|h\|_{L^{q_1'}L^{p_1'}}=1} \|g\|_{L^1L^2} \left\| \int_{\mathbb{R}} \chi(t,s) e^{i(s-t)\Delta} h(t)dt \right\|_{L^\infty L^2}
\end{aligned}$$

et la même preuve que celle de l'étape 2 montre que :

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \chi(t,s) e^{i(s-t)\Delta} h(t)dt \right\|_{L^\infty L^2} \leq c\|h\|_{L^{q_1'}L^{p_1'}}$$

car χ est majoré par 1.

Étape 4 : conclusion dans le cas $p_0 \in (2, p_1)$

On a montré la continuité de $g \mapsto \displaystyle\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds$ entre les espaces $L^{q_1'}L^{p_1'} \to L^{q_1}L^{p_1}$ et $L^1L^2 \to L^{q_1}L^{p_1}$ (étapes 1 et 3). On conclut en invoquant une version généralisée du théorème de Riesz-Thorin 1.1 pour les espaces L^qL^p :

$$\left(\int_0^T \| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds\|_{p_1}^{q_1} dt \right)^{1/q_1} \leq c\|g\|_{L^{q_0'}L^{p_0'}}$$

car $p_0 \in (2, p_1)$ et la définition 2.3 entraînent : $p_0' \in (2, p_1')$ et $q_0' \in (1, q_1')$.

Étape 5 : conclusion dans le cas $p_1 \in (2, p_0)$

En échangeant les rôles de (p_1, q_1) et (p_0, q_0) dans les étapes 1 et 2, on montre la continuité de $g \mapsto \displaystyle\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s)ds$ entre les espaces

$$L^{q_0'}L^{p_0'} \to L^{q_0}L^{p_0}$$

et

$$L^{q_0'}L^{p_0'} \to L^\infty L^2$$

Or, sous l'hypothèse

$$\frac{2}{q} + \frac{d}{p} = \frac{d}{2},$$

l'inégalité de Hölder montre que $L^{q_0}L^{p_0} \cap L^\infty L^2 \subset L^{q_1}L^{p_1}$ lorsque $p_1 \in (2, p_0)$. Plus précisément, soit $u \in L^{q_0}L^{p_0} \cap L^\infty L^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{q_1}L^{p_1}} &= \left(\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_{p_1}^{q_1} dt\right)^{1/q_1} \\
&\leq \left(\int_0^T \|u(t,\cdot)\|_2^{\theta q_1} \|u(t,\cdot)\|_{p_0}^{(1-\theta)q_1} dt\right)^{1/q_1} \\
&= \left\| \|u(t,\cdot)\|_2^{\theta} \|u(t,\cdot)\|_{p_0}^{1-\theta} \right\|_{q_1} \\
&\leq \|u\|_{L^{\theta q_{1,1}}L^2}^{\theta} \|u\|_{L^{(1-\theta)q_{1,2}}L^{p_0}}^{1-\theta}
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{p_0} = \frac{1}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_{1,1}} + \frac{1}{q_{1,2}} = \frac{1}{q_1}.$$

Or, avec $q_{1,1} = \infty$ et $q_{1,2} = q_1$, on a :

$$\theta q_{1,1} = \infty \quad \text{et} \quad (1-\theta)q_{1,2} = (1-\theta)q_1$$

mais alors :

$$(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-\theta)\frac{2}{dq_0} = \frac{2}{dq_1} \Leftrightarrow (1-\theta)q_1 = q_0.$$

et donc $\|u\|_{L^{q_1}L^{p_1}} \leq \|u\|_{L^\infty L^2}^{\theta} \|u\|_{L^{q_0}L^{p_0}}^{1-\theta}$.

Dans le cas présent, on obtient lorsque $p_1 \in (2, p_0)$:

$$\left(\int_0^T \| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s) ds\|_{p_1}^{q_1} dt\right)^{1/q_1} \leq c\|g\|_{L^{q_0'}L^{p_0'}}.$$

□

2.4 Existence locale dans L^2 en dimension $d = 3$

On s'intéresse au problème de Cauchy (3) avec $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Au vu des estimations de Strichartz, on peut prolonger par continuité l'opérateur $g \mapsto \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} g(s) ds$ aux fonctions de $L^{q'}L^{p'}$, ce qui donne sens à la formulation intégrale :

$$u(t,\cdot) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|u(s)ds. \tag{10}$$

Théorème 2.7. *Il existe une unique solution locale de l'équation intégrale* (10) *dans l'intervalle de temps* $[0,T]$ *avec :*

$$u \in C([0,T], L^2) \cap L^4([0,T], L^3(\mathbb{R}^d)).$$

Preuve. On va appliquer le théorème de point fixe de Picard dans l'espace métrique complet $X = C_T L^2 \cap L^4 L^3$ muni de la norme :

$$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^\infty L^2} + \|\cdot\|_{L^4 L^3}.$$

Remarquons que $(p,q) = (3,4)$ est une paire admissible en dimension 3. Comme précédemment, on considère la boule B_a de centre 0 et de rayon a dans X et l'application $\Phi : B_a \to B_a$ définie pour tout $u \in B_a$ et $t \in [0,T]$:

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|u(s)ds.$$

On montre d'abord que Φ est bien définie. D'une part les estimations de Strichartz (6) et (7) donnent :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L^4L^3} &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^4L^3} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|u)(s)ds\right\|_{L^4L^3} \\
&\leq c\|u_0\|_2 + c\||u|u\|_{L^{4/3}L^{3/2}}
\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}
\||u|u\|_{L^{4/3}L^{3/2}} = \|u^2\|_{L^{4/3}L^{3/2}} &= \left(\int_0^T \|u(t)^2\|_{3/2}^{4/3}dt\right)^{3/4} \\
&\leq \left(\int_0^T \|u(t)\|_3^{8/3}dt\right)^{3/4} \\
&\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left[\left(\int_0^T \|u(t)\|_3^4 dt\right)^{2/3} T^{1/3}\right]^{3/4} = T^{1/4}\|u\|_{L^4L^3}^2
\end{aligned}$$

Si $u \in B_a$, alors :

$$\|\Phi(u)\|_{L^4L^3} \leq c\|u_0\|_2 + cT^{1/4}a^2.$$

D'autre part, l'estimation de Strichartz (8) donne :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L^\infty L^2} &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty L^2} + \sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|u(s)ds\right\|_2 \\
&\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty L^2} + \sup_{t\in[0,T]}\left\|\int_0^t e^{-is\Delta}|u|u(s)ds\right\|_2 \\
&\leq c\|u_0\|_2 + \left(\int_0^T \|u(t)^2\|_{3/2}^{4/3}dt\right)^{3/4} \\
&\leq c\|u_0\|_2 + cT^{1/4}a^2.
\end{aligned}$$

Finalement, Φ est bien définie de $B_a \to B_a$ dès que :

$$c\|u_0\|_2 + cT^{1/4}a^2 \leq \frac{a}{2}.$$

Montrons que Φ est contractante, on considère pour cela $u, v \in B_a$ et on calcule à l'aide de (7) :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(v) - \Phi(u)\|_{L^4L^3} &\leq \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|v|v - |u|u)(s)ds \right\|_{L^4L^3} \\
&\leq c\||v|v - |u|u\|_{L^{4/3}L^{3/2}} \\
&\leq c\|(|u| + |v|)|v - u|\|_{L^{4/3}L^{3/2}} \\
&\leq c\left(\||u||v - u|\|_{L^{4/3}L^{3/2}} + \||v||v - u|\|_{L^{4/3}L^{3/2}}\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\||u||v - u|\|_{L^{4/3}L^{3/2}} &= \left(\int_0^T \||u||v - u|\|_{3/2}^{4/3}\right)^{3/4} \\
&\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_0^T \|u\|_3^{4/3}\|v - u\|_3^{4/3}\right)^{3/4} \\
&\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left[\left(\int_0^T \|u\|_3^4\right)^{1/3}\left(\int_0^T \|v - u\|_3^4\right)^{1/3} T^{1/3}\right]^{3/4}
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(v) - \Phi(u)\|_{L^4L^3} &\leq cT^{1/4}\left(\|u\|_{L^4L^3} + \|v\|_{L^4L^3}\right)\|v - u\|_{L^4L^3} \\
&\leq 2cT^{1/4}a\|v - u\|_{L^4L^3}
\end{aligned}$$

De même, à l'aide de (8)

$$\begin{aligned}
\|\Phi(v) - \Phi(u)\|_{L^\infty L^2} &\leq \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|v|v - |u|u)(s)ds \right\|_{L^\infty L^2} \\
&\leq c\||v|v - |u|u\|_{L^{4/3}L^{3/2}} \\
&\leq 2cT^{1/4}a\|v - u\|_{L^4L^3}
\end{aligned}$$

et donc Φ est contractante dès que

$$4cT^{1/4}a < 1.$$

$\square$

Théorème 2.8. *Il existe un voisinage V de u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & C_TL^2 \cap L^4L^3 \\ \tilde{u_0} & \longrightarrow & \tilde{u} \end{array} \right.$$

soit lipschitzienne.

Preuve. Soient u et v deux solutions de (3) avec pour conditions initiales respectives u_0 et v_0. Alors, on peut définir u et v sur un intervalle de temps $[0, T)$ commun et pour tout $t \in [0, T)$:

$$u(t) - v(t) = e^{it\Delta}(u_0 - v_0) - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}(|u|u - |v|v)(s)ds.$$

Le même argument que celui développé pour montrer le caractère contractant de Φ donne :

$$\|u-v\|_{L^4L^3} \leq c\|u_0-v_0\|_{L^2} + cT^{1/4}(\|u_0\|_{L^2}+\|v_0\|_{L^2})\|u-v\|_{L^4L^3}.$$

Si T est assez petit, alors

$$\|u-v\|_{L^4L^3} \leq c\|u_0-v_0\|_{L^2}.$$

Et de façon analogue, on montre que

$$\|u-v\|_{L^\infty L^2} \leq c\|u_0-v_0\|_{L^2}.$$

□

2.5 Existence locale dans H^1 en dimension $d=3$

Théorème 2.9. *Il existe une unique solution locale de l'équation intégrale* (10) *dans l'intervalle de temps* $[0,T]$ *avec :*

$$u \in C([0,T],H^1) \cap L^4([0,T],W^{1,3}(\mathbb{R}^d)).$$

PREUVE. On considère l'espace métrique complet $X = C_TH^1 \cap L^4W^{1,3}$ muni de la norme :

$$\|v\|_X = \|v\|_{L^\infty H^1} + \|v\|_{L^4L^3} + \|\nabla v\|_{L^4L^3}$$

où on note ici $\|\nabla u\|_{L^4L^3} = \sum_j \|\partial_{x_j}u\|_{L^4L^3}$ (ou tout autre norme équivalente). On considère alors l'application $\Phi : B_a \to B_a$ définie pour tout $u \in B_a$ et tout $t \in [0,T]$ par :

$$\Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}|u|u(s)ds.$$

Pour montrer que Φ est bien définie, on a comme précédemment :

$$\|\Phi(u)\|_{L^4L^3} \leq c\|u_0\|_2 + cT^{1/4}a^2$$

et pour $j \in \{1,2,3\}$, comme ∂_{x_j} commute avec $e^{it\Delta}$:

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_j}\Phi(u)\|_{L^4L^3} &\leq \|e^{it\Delta}\partial_{x_j}u_0\|_{L^4L^3} + \left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\partial_{x_j}(|u|u)(s)ds\right\|_{L^4L^3} \\ &\underset{\text{Strichartz}}{\leq} c\|\partial_{x_j}u_0\|_{L^2} + c\|\partial_{x_j}(|u|u)\|_{L^{4/3}L^{3/2}}.\end{aligned}$$

On note $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ u \mapsto |u|u$. En assimilant $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, on peut écrire :

$$\partial_{x_j}f(u) = f'(u)\partial_{x_j}u$$

où $f'(u)$ désigne ici la jacobienne de f, c'est à dire en notant $u = u_1 + iu_2$:

$$f'(u) = \begin{pmatrix} |u| + \frac{u_1^2}{|u|} & \frac{u_1u_2}{|u|} \\ \frac{u_1u_2}{|u|} & |u| + \frac{u_2^2}{|u|} \end{pmatrix}$$

si $u \neq 0$ et $f'(u) = 0$ sinon. On peut alors écrire :

$$|\partial_{x_j}(|u|u)| = |f'(u)\partial_{x_j}u| \leq \|f'(u)\|_2|\partial_{x_j}u| \leq c|u||\partial_{x_j}u|.$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne ici la norme euclidienne subordonnée. Finalement,

$$\|\partial_{x_j}(|u|u)\|_{L^{4/3}L^{3/2}} \leq c\|u\partial_{x_j}u\|_{L^{4/3}L^{3/2}} \leq cT^{1/4}\|u\|_{L^4L^3}\|\partial_{x_j}u\|_{L^4L^3} \leq cT^{1/4}a^2.$$

Et puisque :

$$\|\Phi(u)\|_{L^\infty H^1} = \sup_{t\in[0,T]}\{\|\Phi(u)(t)\|_{L^\infty L^2}+\|\nabla\Phi(u)(t)\|_{L^\infty L^2}\} \leq \|\Phi(u)\|_{L^\infty L^2}+\|\nabla\Phi(u)\|_{L^\infty L^2}$$

on montre alors que Φ est bien définie dès que :

$$c\|u_0\|_{H^1} + cT^{1/4}a^2 \leq a.$$

Pour montrer que Φ est contractante, on procède de la même façon que pour le théorème 2.7 en remarquant que pour $u, v \in B_a$:

$$\begin{aligned} \nabla(|u|u - |v|v) &= f'(u)\nabla u + f'(v)\nabla v \\ &= f'(u)\nabla(u-v) + (f'(u) - f'(v))\nabla v. \end{aligned}$$

et f' est lipschitzienne (pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$) donc :

$$|\nabla(|u|u - |v|v)| \leq c|u||\nabla(u-v)| + c|u-v||\nabla v|.$$

□

On obtient aussi avec le même raisonnement que pour le théorème 2.8 :

Théorème 2.10. *Il existe un voisinage V de u_0 dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ tel que*

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & C_T H^1 \cap L^4 W^{1,3} \\ \tilde{u_0} & \longrightarrow & \tilde{u} \end{array} \right.$$

soit lipschitzienne.

Théorème 2.11. *Le problème de Cauchy* (3) *admet une unique solution locale maximale dans l'espace $C_T H^1$.*

Preuve. Soient u la solution construite dans le théorème 2.9 et v une autre solution dans $C_T H^1$. Alors, d'après le théorème 1.10 $H^1 \hookrightarrow L^6$ et comme $H^1 \subset L^2$, on a par interpolation $v \in L^4L^3$. On reprend le même calcul que précédemment, et comme $u(0) = v(0) = u_0$:

$$\|u - v\|_{L^4L^3} \leq cT^{1/4}\|u - v\|_{L^4L^3}.$$

Pour T assez petit, on a alors

$$\|u - v\|_{L^4L^3} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{L^4L^3}$$

et donc $u = v$. □

2.6 Explosion en temps fini

Le résultat très général suivant donne une condition nécéssaire et suffisante simple pour l'existence globale d'une solution d'une équation différentielle ordinaire.

Théorème 2.12 (Explosion en temps fini)**.** *Soit u une solution maximale du problème de Cauchy* (3) *définie sur* $[0, T_M)$*. Alors* $T_M < \infty$ *si et seulement si* $\limsup_t \|u(t)\|_{H^1} = \infty$ *en temps fini.*

PREUVE. Soit $T_M < \infty$ et supposons par l'absurde que les normes $\|u(t)\|_{H^1}$ sont uniformément bornées par M sur $[0, T_M)$. On a montré que si u_0 est une condition initiale au temps t_0, alors on peut construire une solution sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon = \varepsilon(\|u_0\|_{H^1})$ et plus précisément, il existe des constantes strictement positives C et α telles que

$$\varepsilon(\|u_0\|_{H^1}) = C\|u_0\|_{H^1}^{-\alpha} \geq CM^{-\alpha}.$$

Choisissons alors $t_0 \in [0, T_M)$ tel que $|T_M - t_0| < \frac{1}{2}CM^{-\alpha}$. On peut donc construire une solution de (3), avec une condition initiale au temps t_0, définie sur $[t_0, t_0 + \varepsilon)$. Mais alors $t_0 + \varepsilon > T_M$, ce qui contredit la maximalité de u.

Réciproquement, si u explose en temps fini *i.e.* il existe $T < \infty$ tel que $\limsup_{t \to T} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$, alors $T_M \leq T$ car un prolongement sur $(T, T + \varepsilon)$ ne serait pas continu. □

En particulier, il suffira à l'avenir de montrer qu'une solution est bornée pour en déduire l'existence globale.

3 Existence globale et comportement asymptotique

3.1 Preuve des lois de conservation (4) et (5)

Soient $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $u \in C_T L^2$ une solution associée à cette condition initiale. Par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut considérer une suite $(u_0^n)_n$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\|u_0^n - u_0\|_2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Notons $(u^n)_n$ la suite des éléments de $C_T^1 L^2$ associés aux conditions initiales respectives $(u_0^n)_n$ (avec T que l'on choisit commun aux u^n). Toutes ces fonctions vérifient l'équation sous forme intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u^n(t) = u_0^n - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u^n(s) ds$$

et

$$u(t) = u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u(s) ds.$$

Lorsqu'on soustrait ces deux relations, la même preuve que celle développée dans le théorème 2.7 pour montrer le caractère contractant de Φ montre que pour tout t :

$$\|u^n(t) - u(t)\|_2 \leq c\|u_0^n - u_0\|_2 + c\|u^n - u\|_X.$$

Et le théorème 2.8 montre que :

$$\|u^n(t) - u(t)\|_2 \le c\|u_0^n - u_0\|_2.$$

Ce qui montre que pour tout t, $\|u^n(t) - u(t)\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\|u^n(t)\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|u(t)\|_2$. Or, le calcul formel précédent étant justifié pour les u^n, on a pour tout t :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u^n(t)\|_2 = \|u_0^n\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|u_0\|_2$$

et donc $\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2$.

Le même procédé et le théorème 2.10 permettent de montrer (5).

3.2 Résultats d'existence globale

On s'intéresse à l'équation de Schrödinger dans les deux cas :

$$i\partial_t u + \Delta u = \pm|u|u.$$

Dans le cas focalisant (+), les lois de conservation donnent :

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2 \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \le E(u_0)$$

où on note $E(u_0)$ l'énergie (5) à l'instant initial.

On en déduit que les normes $\|u(t)\|_2$ et $\|u(t)\|_{H^1}$ sont uniformément bornées et en vertu du théorème 2.12, on peut prolonger la solution locale u en une solution globale.

Dans le cas défocalisant (−), la loi de conservation (5) devient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{1}{3}|u|^3\right) = E(u_0).$$

Afin de borner $\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2$, on utilise l'inégalité de Hölder et le théorème 1.10 pour montrer :

$$\|u(t)\|_3 \le \|u(t)\|_6^{1/2}\|u(t)\|_2^{1/2} \le c\|u(t)\|_{H^1}^{1/2}\|u(t)\|_2^{1/2}$$

car on a bien $6 = \frac{2\cdot 3}{3-2\cdot 1}$ donc $H^1 \hookrightarrow L^6$.

On obtient finalement :

$$E(u_0) = \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{3}\|u(t)\|_3^3 \ge \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - c\|u(t)\|_{H^1}^{3/2}\|u(t)\|_2^{3/2}$$

ce qui, compte de tenu de la conservation de la norme $L^2(\mathbb{R}^d)$, se réécrit :

$$c(\|u(t)\|_{H^1} - \|u_0\|_2)^2 \le E(u_0) + c\|u_0\|_2^{3/2}\|u(t)\|_{H^1}^{3/2}$$

et puisque $2 > 3/2$, on déduit de cette dernière relation que $\|u(t)\|_{H^1}$ est borné. Le théorème 2.12 peut alors s'appliquer pour construire une solution globale.

3.3 Numérologie et cas limites

On peut plus généralement s'intéresser à l'équation

$$i\partial_t u + \Delta u = \pm |u|^\alpha u.$$

Une preuve similaire à celle du théorème 2.9 permet de montrer que le problème est localement bien posé en dimension 3 pour $\alpha \leq 4$. De plus un raisonnement en tout point semblable au précédent nous conduit à la loi de conservation suivante dans le cas défocalisant :

$$\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{\alpha+2}\|u(t)\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} = E(u_0).$$

Procédons de même que pour $\alpha = 1$ et majorons en sachant que $H^1 \hookrightarrow L^6$:

$$\|u(t)\|_{\alpha+2} \leq \|u(t)\|_6^{1-\theta}\|u(t)\|_2^\theta \leq c\|u(t)\|_{H^1}^{1-\theta}\|u(t)\|_2^\theta$$

avec

$$\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{6} = \frac{1}{\alpha+2} \quad i.e. \quad \theta = \frac{3}{\alpha+2} - \frac{1}{2}$$

et

$$2 \leq \alpha + 2 \leq 6 \quad i.e. \quad 0 \leq \alpha \leq 4.$$

On trouve alors, toujours grâce à (4) :

$$c(\|u(t)\|_{H^1} - \|u_0\|_2)^2 \leq E(u_0) + \frac{c}{\alpha+2}\|u_0\|_2^{\theta(\alpha+2)}\|u(t)\|_{H^1}^{(\alpha+2)(1-\theta)}. \tag{11}$$

Si on poursuit le raisonnement comme précédemment, le problème admet une solution globale dès que :

$$(\alpha+2)(1-\theta) \leq 2 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{4}{3}.$$

Dans le cas $4/3 \leq \alpha \leq 4$, on commence par remarquer que $E(u_0) > 0$ en écrivant (11) pour $t = 0$. Et puisqu'on peut contrôler $E(u_0)$ par la norme $\|u_0\|_{H^1}$:

$$\begin{aligned} E(u_0) &= \|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_{\alpha+2}^{\alpha+2} \\ &\leq \|u_0\|_{H^1}^2 + \|u_0\|_6^{(\alpha+2)(1-\theta)}\|u_0\|_2^{(\alpha+2)\theta} \\ &\leq \|u_0\|_{H^1}^2 + c\|u_0\|_{H^1}^{\alpha+2} \end{aligned}$$

le théorème qui suit permet de conclure dans le cas où $\|u_0\|_{H^1}$ est assez petit.

Lemme 3.1. *Soient E une fonction continue et $p > 1$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$E(t) \leq \varepsilon + cE(t)^p$$

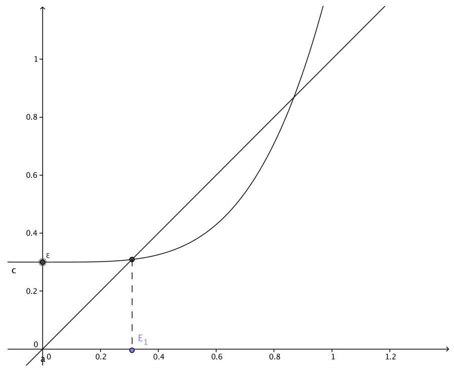
avec $\varepsilon > 0$ assez petit. Alors il existe $E_1 > 0$ tel que si $E(0) < E_1$ alors E reste bornée.

Preuve. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}_+, \quad x \leq \varepsilon + cx^p\}$$

a deux composantes connexes par arcs dans $\mathbb{R}_+$ (non réduites à un point) dont l'une contient 0. Elle est donc de la forme $[0, E_1]$ où $E_1 > 0$. Si $E(0) < E_1$ alors, puisque E est continue, son image reste dans la même composante connexe par arcs, autrement dit :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E(t) \leq E_1.$$



$\square$

On peut bien sûr généraliser ce résultat en remplaçant x^p par n'importe quelle fonction dérivable convexe qui s'annule en 0 et dont la dérivée est continue en 0 et est plus petite (strictement) que 1.

3.4 Comportement asymptotique et scattering en dimension $d = 4$

On se place en dimension $d = 4$ et on étudie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = u^2 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^2(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,3/2}(\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant qui précise le comportement asymptotique de la solution (problème de *scattering*).

Théorème 3.2. *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $\|u_0\|_{H^2 \cap W^{1,3/2}} \leq \varepsilon$ alors il existe $v_\infty \in H^1$ vérifiant*

$$\|u(t) - e^{it\Delta} v_\infty\|_{H^1} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Preuve. Pour $p \geq 2$ qui sera spécifié plus tard et pour $T > 0$ on considère la norme :

$$\|u\|_{X(T)} = \sup_{t \leq T} \left\{ \|u(t)\|_{H^1} + (1+t)^{d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)} \left(\|u(t)\|_p + \|\nabla u(t)\|_p\right) \right\}.$$

En particulier, on a $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{X(T)}$ et de même pour $\|\cdot\|_{H^1}$.

Étape 1. On commence par montrer pour tout $t > 0$:

$$\|u(t)\|_p \leq \frac{c\|u_0\|_{H^1} + c\|u_0\|_{p'} + c\|u\|_{X(T)}^2}{(1+t)^{d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)}}.$$

• Si $t \geq 1$, la formule de Duhamel, l'inégalité de dispersion (théorème 1.15) et l'inégalité de Minkowski donnent :

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_p &= \|e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}u^2(s)ds\|_p \\
&\leq c\frac{\|u_0\|_{p'}}{t^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}} + \int_0^t \|e^{i(t-s)\Delta}u^2(s)\|_p\,ds \\
&\leq c\frac{\|u_0\|_{p'}}{t^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}} + c\int_0^t \frac{1}{|t-s|^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}}\|u(s)\|_p^2\,ds
\end{aligned}$$

où l'on a choisit p tel que $p = 2p'$, c'est à dire $p = 3$. On note alors que $d\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{2}{3}$.

Puisque $t \geq 1$, on peut écrire :

$$\int_0^t \frac{1}{|t-s|^{d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)}}\|u(s)\|_p^2\,ds = \int_0^1 \frac{1}{|t-s|^{2/3}}\|u(s)\|_p^2\,ds + \int_1^t \frac{1}{|t-s|^{2/3}}\|u(s)\|_p^2\,ds$$

et on majore successivement :

$$\int_0^1 \frac{1}{|t-s|^{2/3}}\|u(s)\|_p^2\,ds \leq \frac{c}{t^{2/3}}\int_0^1 \|u(s)\|_p^2\,ds \leq \frac{c}{t^{2/3}}\|u\|_{X(T)}^2$$

car $(t-s)^{-2/3} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{-2/3}$. (Plus précisément, l'équivalent donne l'inégalité pour $t \geq t_0$ et pour $1 \leq t \leq t_0$ on majore directement $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{(t-s)^{2/3}} \leq \tilde{c} \leq ct^{-2/3}$ où $c = \tilde{c}t_0^{2/3}$.) Puis :

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{1}{(t-s)^{2/3}}\|u(s)\|_p^2\,ds &\leq \int_1^t \frac{1}{(1+s)^{4/3}(t-s)^{2/3}}(1+s)^{4/3}\|u(s)\|_p^2\,ds \\
&\leq \|u\|_{X(T)}^2 \int_1^t \frac{ds}{(1+s)^{4/3}(t-s)^{2/3}}
\end{aligned}$$

Or, le changement de variable $s = tr$ dans la dernière intégrale donne :

$$\int_1^t \frac{ds}{(1+s)^{4/3}(t-s)^{2/3}} \leq \frac{1}{t}\int_{1/t}^1 \frac{dr}{r^{4/3}(1-r)^{2/3}}.$$

Et comme $\dfrac{1}{r^{4/3}(1-r)^{2/3}} \underset{r\to0}{\sim} \dfrac{1}{r^{4/3}}$, on a par intégration des relations de comparaison :

$$\frac{1}{t}\int_{1/t}^1 \frac{dr}{r^{4/3}(1-r)^{2/3}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}\int_{1/t}^1 \frac{dr}{r^{4/3}} = \mathcal{O}((1+t)^{-2/3}).$$

On conclut ce sous-cas en écrivant que $t^{-2/3} \underset{t \to +\infty}{\sim} (1+t)^{-2/3}$.

- Dans le cas où $t \leq 1$, on a :

$$\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{2/3}} \|u(s)\|_p^2 \leq \|u\|_{X(T)}^2 \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{2/3}} = \|u\|_{X(T)}^2 \left[-3(t-s)^{1/3} \right]_0^t = 3t^{1/3} \|u\|_{X(T)}^2 \leq \frac{c\|u\|_{X(T)}^2}{(1+t)^{2/3}}.$$

Et en supposant $u_0 \in H^1$, le théorème 1.10 montre que :

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_3 \leq c\|e^{it\Delta} u_0\|_{H^{2/3}} \leq c\|u_0\|_{H^1} \leq \frac{c\|u_0\|_{H^1}}{(1+t)^{2/3}}.$$

Étape 2. La même preuve que celle de l'étape 1 montre que :

$$\|\nabla u(t)\|_3 \leq \frac{c\|u_0\|_{H^2} + c\|u_0\|_{p'} + \|u\|_{X(T)}^2}{(1+t)^{d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)}}$$

à condition de supposer $u_0 \in H^2$ pour le cas $t \leq 1$. On a finalement montré que :

$$(1+t)^{2/3} (\|u\|_3 + \|\nabla u\|_3) \leq c\|u_0\|_{H^2} + c\|u_0\|_{p'} + c\|\nabla u_0\|_{p'} + c\|u\|_{X(T)}^2.$$

Étape 3. On montre que $\|u(t)\|_{H^1} \leq \|u_0\|_{H^1} + c\|u\|_{X(T)}^2$.

On a en effet, comme $e^{it\Delta}$ est une isométrie sur L^2 et en vertu de l'inégalité de Strichartz (8) :

$$\begin{aligned} \|u\|_2 &\leq \|e^{it\Delta} u_0\|_2 + \left\| e^{it\Delta} \int_0^t e^{-is\Delta} u^2(s) ds \right\|_2 \\ &\leq \|u_0\|_2 + \|u^2\|_{L^{q'} L^{p'}} \\ &\leq \|u_0\|_2 + \|u\|_{L^{2q'} L^{2p'}}^2 \\ &\leq \|u_0\|_2 + \|u\|_{L^3 L^3}^2 \end{aligned}$$

car $(p, q) = (3, 3)$ est une paire admissible en dimension 4 et $p' = q' = 3/2$. Or :

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^3 L^3} &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \|u(t)\|_3^3 dt \right)^{1/3} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} (1+t)^2 \|u(t)\|_3^3 \cdot \frac{dt}{(1+t)^2} \right)^{1/3} \\ &\leq \|u\|_{X(T)} \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dt}{(1+t)^2} \right)^{1/3} = c\|u\|_{X(T)} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 + c\|u\|_{X(T)}^2.$$

On a aussi de la même façon et en reprenant le même calcul que dans la preuve du théorème 2.9 avec $p = q = 3$:

$$\begin{aligned}
\|\nabla u(t)\|_2 &\leq \|\nabla u_0\|_2 + c\|\nabla(u^2)\|_{L^{q'}L^{p'}} \\
&\leq \|\nabla u_0\|_2 + c\|u\nabla u\|_{L^{q'}L^{p'}} \\
&\leq \|\nabla u_0\|_2 + c\|u\|_{L^3L^3}\|\nabla u\|_{L^3L^3} \\
&\leq \|\nabla u_0\|_2 + c\|u\|^2_{X(T)}.
\end{aligned}$$

Étape 4. En conclusion, on a montré que

$$\|u\|_{X(T)} \leq \varepsilon_0 + \|u\|^2_{X(T)}.$$

et le lemme 3.1 permet de conclure quant à la finitude de $\|u\|_X \equiv \sup_T \|u\|_{X(T)}$ lorsque $u_0 \in H^2 \cap W^{1,p'}$ est suffisamment petit :

$$\|u\|_X < +\infty.$$

Remarquons que pour aboutir à ce résultat, on aurait tout aussi bien pu réécrire un théorème point fixe dans le nouvel espace fonctionnel considéré (les estimations obtenues permettent de montrer la bonne définition près de l'origine, resterait alors à montrer le caractère contractant).

Étape 5. On est maintenant en mesure de conclure. Posons pour $t \in \mathbb{R}$:

$$v(t) = e^{-it\Delta}u(t) = u_0 - i\int_0^t e^{-is\Delta}u^2(s)ds \in H^1.$$

Il s'agit de montrer que $v(t)$ converge dans H^1 lorsque $t \to +\infty$. Pour cela, montrons que la famille des $\{v(t)\}$ est de Cauchy dans H^1. Pour $s < t$, on a grâce à l'estimation de Strichartz (8) :

$$\begin{aligned}
\|v(t) - v(s)\|_2 &\leq c\|u^2\|_{L^{q'}([s,t],L^{p'})} \\
&\leq c\|u\|^2_{L^{2q'}([s,t],L^{2p'})} \\
&\leq c\left(\int_s^t \|u(\tau)\|_3^3 d\tau\right)^{2/3} \\
&\leq c\|u\|^2_X\left(\int_s^t \frac{d\tau}{(1+\tau)^2}\right)^{2/3} \underset{s,t\to+\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

où on a pris $p = q = 3$ comme à l'étape 3.

De façon tout à fait similaire, on montre que $\|\nabla v(t) - \nabla v(s)\|_2 \underset{s,t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui conclut la preuve. □

Il existe d'autres preuves de ce résultat, basées sur les estimations de Strichartz, parfois plus rapides et qui ne supposent pas forcément $u_0 \in W^{1,3/2}$. La preuve donnée plus haut présente néanmoins l'avantage de quantifier la vitesse de convergence, à savoir $\mathcal{O}(t^{-2/3})$ d'après la dernière étape.

Le problème de scattering pour l'équation de Schrödinger quadratique en dimension 3 est plus difficile et comporte des questions encore ouvertes. La section suivante en présente quelques aspects.

4 Problèmes de scattering pour l'équation de Schrödinger quadratique en dimension 3

On considère les équations suivantes :

$$i\partial_t u + \Delta u = u^2 \tag{12}$$

$$i\partial_t u + \Delta u = \bar{u}^2 \tag{13}$$

$$i\partial_t u + \Delta u = |u|^2. \tag{14}$$

Dans la suite on s'intéressera surtout à l'équation (12) pour laquelle on donnera l'idée générale d'une preuve d'existence globale et de scattering en dimension 3. L'équation (13) se traite de façon similaire mais la question de l'existence globale pour l'équation (14) est un problème encore ouvert. Cette section est largement inspiré de [5] et [6].

4.1 Introduction

La preuve du théorème 3.2 utilise de façon cruciale le fait que $d > 3$: pour le voir, reprenons les calculs de l'étape 1 en explicitant d. On montre :

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_3 &\leq c\frac{\|u_0\|_{3/2}}{t^{d/6}} + \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{d/6}}\|u(s)\|_3^2\,ds \\
&\leq c\frac{\|u_0\|_{3/2}}{t^{d/6}} + \int_0^t \frac{ds}{(1+s)^{d/3}(t-s)^{d/6}}\|u\|_X^2.
\end{aligned}$$

En dimension 3, la dernière intégrale prise entre 1 et t se comporte comme :

$$\int_1^t \frac{ds}{(1+s)(t-s)^{1/2}} \underset{t\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{\ln t}{t^{1/2}}\right)$$

et non comme $\mathcal{O}(t^{-1/2})$ comme escompté.

Remarquons à ce stade qu'une nonlinéarité cubique ne serait pas problématique, il suffirait d'écrire un calcul similaire en norme p tel que $p = 3p'$, *i.e.* $p = 4$. En dimension 3, on aurait alors :

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_4 &\leq c\frac{\|u_0\|_{p'}}{t^{3/4}} + c\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/4}}\|u(s)\|_4^3\,ds \\
&\leq c\frac{\|u_0\|_{p'}}{t^{3/4}} + c\|u\|_X^3 \int_0^t \frac{ds}{(1+s)^{9/4}(t-s)^{3/4}}
\end{aligned}$$

ce qui fournit bien la décroissance en $\mathcal{O}(t^{-3/4})$.

La suite de cette section explore différentes méthodes pour gagner formellement de la décroissance en temps ou une puissance dans la nonlinéarité. On pourrait alors pour conclure s'inspirer de la preuve du théorème 3.2 en adaptant la norme X au contexte. Aucune preuve complète n'est cependant présentée ici. Le problème est intégralement traité dans [5].

4.2 Résonances en temps et en espace

Posons pour u solution de (12),

$$f(t) = e^{-it\Delta}u(t) = u_0 - i\int_0^t e^{-is\Delta}(e^{is\Delta}f(s))^2\,ds.$$

f est parfois appelé le *profil* de la solution. En prenant la transformée de Fourier en espace de cette relation, on trouve :

$$\begin{aligned}\hat{f}(t,\xi) &= \widehat{u_0}(\xi) - i\int_0^t e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\int_\eta e^{-4i\pi^2|\xi-\eta|^2 s}\hat{f}(s,\xi-\eta)e^{-4i\pi^2|\eta|^2 s}\hat{f}(s,\eta)\,d\eta ds \\ &= \widehat{u_0}(\xi) - i\int_0^t\int_\eta e^{is\Omega(\xi,\eta)}\hat{f}(s,\xi-\eta)\hat{f}(s,\eta)d\eta ds\end{aligned}$$

où on a posé :

$$\Omega(\xi,\eta) = 4\pi^2(|\xi|^2 - |\eta|^2 - |\xi-\eta|^2) \quad \text{et} \quad \nabla_\eta\Omega = 8\pi^2(\xi - 2\eta).$$

L'idée principale est d'intégrer par partie cette dernière relation à partir des identités :

$$e^{is\Omega} = \frac{1}{i\Omega}\partial_s(e^{is\Omega}) \quad \text{et} \quad e^{is\Omega} = \frac{1}{is|\nabla_\eta\Omega|^2}\nabla_\eta\Omega\cdot\nabla_\eta(e^{is\Omega}).$$

Comme on le verra plus en détails dans la suite, lorsqu'on intègre par parties en temps, on gagne une puissance dans la nonlinéarité (c'est une conséquence de la relation $\partial_s f(s) = -ie^{-is\Delta}u^2(s)$) et lorsqu'on intègre par parties en espace, on gagne une décroissance supplémentaire en $1/s$.

Pour rendre les calculs rigoureux, il devient donc nécessaire d'étudier les ensembles :

$$\mathscr{T} = \{(\xi,\eta),\ \Omega(\xi,\eta) = 0\}$$

et

$$\mathscr{S} = \{(\xi,\eta),\ \nabla_\eta\Omega(\xi,\eta) = 0\}$$

respectivement nommés ensemble des résonances en temps et ensemble des résonances en espace. En fait, il convient surtout de remarquer que :

$$\mathscr{R} = \mathscr{T} \cap \mathscr{S} = \{(0,0)\}.$$ [1]

Lorsque $\mathscr{R}$ est assez petit (idéalement $\emptyset$), l'idée est de construire une partition de l'unité pour intégrer par parties soit en s ou soit en η. Voici une manière standard de procéder : sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}$ sont deux compacts disjoints et le lemme d'Urysohn assure l'existence d'une fonction $\chi \in C_0^\infty$ qui vaut 0 sur $\mathscr{S}$ et 1 sur $\mathscr{T}$. Comme ces deux ensembles présentent une "symétrie radiale" (au sens où si $(\xi,\eta) \in \mathscr{T},\mathscr{S}$ et si $\lambda > 0$ alors $(\lambda\xi,\lambda\eta) \in \mathscr{T},\mathscr{S}$), on peut prolonger χ à tout $\mathbb{R}^6$.

On écrit alors :

$$\hat{f}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) - i\int_0^t \int_\eta e^{is\Omega(\xi,\eta)}\hat{f}(s,\xi-\eta)\hat{f}(s,\eta)(\underbrace{\chi(\xi,\eta)}_{=0 \text{ si } \nabla_\eta\Omega=0} + \underbrace{1-\chi(\xi,\eta)}_{=0 \text{ si } \Omega=0})d\eta ds.$$

Cette dernière écriture montre qu'on peut séparer l'intégrale en deux pour intégrer par parties en η lorsque $\nabla_\eta\Omega \neq 0$ (multiplication par χ) et en s lorsque $\Omega \neq 0$ (multiplication par $1-\chi$).

Pour l'équation (13) on a aussi $\mathscr{R} = \{(0,0)\}$ et le même procédé s'applique. Toutefois, pour l'équation (14) on peut montrer que $\mathscr{R} = \{\xi = 0\}$ et on ne peut pas poursuivre en suivant le même procédé. En fait, il s'agit d'un problème encore ouvert.

4.3 Pseudo-produit et théorème de Coifman-Meyer

Avant de poursuivre, on introduit la notion de pseudo-produit qui apparaîtra naturellement dans la suite.

Définition 4.1 (Pseudo-produit). *Soit $m(\xi,\eta) \in L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$. Soient f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. On définit le pseudo produit de f et g par*

$$T_m(f,g) = \mathcal{F}^{-1}\int m(\xi,\eta)\hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)d\eta.$$

Lorsque m vérifie des hypothèses assez fortes de régularité, on dispose d'une inégalité de type Hölder sur la continuité de l'opérateur T_m.

1. Lorsque l'ensemble résonant est réduit à l'origine, il existe principalement deux méthodes pour conclure :

i) on peut intégrer par parties en utilisant un multiplicateur "régularisé" : $e^{is\Omega} = \frac{1}{\frac{1}{1+s}+i\Omega}(\frac{1}{1+s}+\partial_s)e^{is\Omega}$

ii) on peut considérer une fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)$ égale à 1 dans un voisinage de $(0,0)$ et sa version dilatée $\chi^s(\xi,\eta) = \chi(\sqrt{s}\xi,\sqrt{s}\eta)$ puis écrire :

$$\hat{f}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) + c\int_0^t\int_\eta e^{i\Omega s}\eta\cdot(\xi-\eta)\hat{\hat{f}}(s,\eta)\hat{\hat{f}}(s,\xi-\eta)(1-\chi^s+\chi^s)d\eta ds.$$

Pour contrôler les nouveaux termes qui ne manqueront pas d'apparaître, on renvoie aux lemmes 2.3 et 2.4 de [5]. On se contentera ici d'évaluer les termes "principaux" (cf. [5] et [1] pour une preuve plus complète).

Théorème 4.2 (Coifman-Meyer). *Si m vérifie pour suffisamment de multiindices (α, β) :*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_\eta^\beta m(\xi, \eta)| \leq \frac{C}{(|\xi| + |\eta|)^{|\alpha|+|\beta|}}$$

alors l'opérateur

$$T_m : L^p \times L^q \to L^r$$

est continu pour

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, \quad 1 < p, q \leq \infty \quad et \quad 1/2 < r < \infty.$$

4.4 Intégration par parties en temps et en espace

4.4.1 En temps

Dans un souci de clarté, on omet dans la suite toute mention explicite de χ. On calcule donc en supposant que Ω ne s'annule pas :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t, \xi) &= \widehat{u_0}(\xi) - i \int_0^t \int_\eta e^{is\Omega} \hat{f}(s, \eta) \hat{f}(s, \xi - \eta) d\eta ds \\
&= \widehat{u_0}(\xi) - i \int_0^t \int_\eta \frac{1}{i\Omega} \partial_s (e^{is\Omega}) \hat{f}(s, \eta) \hat{f}(s, \xi - \eta) d\eta ds \\
&= \widehat{u_0}(\xi) - i \int_0^t \int_\eta \frac{1}{i\Omega} e^{is\Omega} \partial_s \hat{f}(s, \eta) \hat{f}(s, \xi - \eta) d\eta ds + \text{termes semblables}
\end{aligned}$$

où les "termes semblables" correspondent à la dérivée en s de $\hat{v}(s, \xi - \eta)$. Or,

$$\partial_s f = -ie^{-is\Delta} \Delta u + e^{-is\Delta} \partial_s u = -ie^{-is\Delta}(i\partial_s u + \Delta u) = -ie^{-is\Delta}(u^2).$$

En reprenant la définition de Ω, de f et de $e^{it\Delta}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t, \xi) &= \widehat{u_0}(\xi) + \int_0^t \int_\eta \frac{1}{\Omega} e^{4i\pi^2 |\xi|^2 s} \widehat{u^2}(s, \eta) \hat{u}(s, \xi - \eta) d\eta ds + \text{termes semblables} \\
&= \widehat{u_0}(\xi) + \int_0^t e^{4i\pi^2 |\xi|^2 s} \int_\eta \frac{1}{\Omega} \widehat{u^2}(s, \eta) \hat{u}(s, \xi - \eta) d\eta ds + \text{termes semblables} \\
&= \widehat{u_0}(\xi) + \int_0^t e^{4i\pi^2 |\xi|^2 s} \mathcal{F} T_\Omega(u^2, u) ds + \text{termes semblables}
\end{aligned}$$

où on a défini le pseudo-produit :

$$T_\Omega(f, g) = \mathcal{F}^{-1} \int \frac{1}{\Omega} \hat{f}(\eta) \hat{g}(\xi - \eta) d\eta.$$

On en déduit :

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0(x) + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} T_\Omega(u^2, u) ds + \text{termes semblables}.$$

On remarque alors que la nonlinéarité est maintenant cubique et on peut conclure grâce au théorème de Coifman-Meyer : pour $p = 4$, on a :

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_4 &\leq c\frac{\|u_0\|_{4/3}}{t^{3/4}} + c\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/4}}\|T_\Omega(u^2,u)\|_{4/3}\,ds + \text{termes semblables}\\
&\leq c\frac{\|u_0\|_{4/3}}{t^{3/4}} + c\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/4}}\|u^2(s)\|_2\|u(s)\|_4\,ds + \text{termes semblables}\\
&\leq c\frac{\|u_0\|_{4/3}}{t^{3/4}} + c\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/4}}\|u(s)\|_4^3\,ds + \text{termes semblables}\\
&\leq c\frac{\|u_0\|_{4/3}}{t^{3/4}} + c\int_0^t \frac{ds}{(1+s)^{9/4}(t-s)^{3/4}}\|u\|_X^3 + \text{termes semblables.}
\end{aligned}$$

Notons que ces calculs ne sont licites que si la fonction χ est suffisamment explicite pour vérifier les conditions de régularité du théorème de Coifman-Meyer.

4.4.2 En espace

On calcule en supposant que $\nabla_\eta\Omega$ ne s'annule pas :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t,\xi) &= \widehat{u_0}(\xi) - i\int_0^t\int_\eta e^{is\Omega}\hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds\\
&= \widehat{u_0}(\xi) - i\int_0^t\int_\eta \frac{1}{is|\nabla_\eta\Omega|^2}\nabla_\eta\Omega\cdot\nabla_\eta(e^{is\Omega})\hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds\\
&= \widehat{u_0}(\xi) - \int_0^t\int_\eta \frac{1}{s}e^{is\Omega}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla_\eta\Omega}{|\nabla_\eta\Omega|^2}\hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)\right)d\eta ds\\
&= \widehat{u_0}(\xi) - \int_0^t\int_\eta \frac{1}{s}e^{is\Omega}\operatorname{div}\left(\frac{\nabla_\eta\Omega}{|\nabla_\eta\Omega|^2}\right)\hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds\\
&\quad -\int_0^t\int_\eta \frac{1}{s}e^{is\Omega}\frac{\nabla_\eta\Omega}{|\nabla_\eta\Omega|^2}\cdot\nabla_\eta\hat{f}(s,\eta)\hat{f}(s,\xi-\eta)d\eta ds + \text{termes semblables}
\end{aligned}$$

On définit alors les pseudo-produits :

$$T^j_\Omega(f,g) = \mathcal{F}^{-1}\int \frac{\partial_{\eta_j}\Omega}{|\nabla_\eta\Omega|^2}\hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)d\eta, \quad j\in\{1,2,3\}$$

et

$$R_\Omega(f,g) = \mathcal{F}^{-1}\int \operatorname{div}\left(\frac{\nabla_\eta\Omega}{|\nabla_\eta\Omega|^2}\right)\hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)d\eta.$$

et on a alors :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t,\xi) &= \widehat{u_0}(\xi) - \int_0^t \frac{1}{s}e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\mathcal{F}\,R_\Omega(u,u)d\eta ds\\
&\qquad + c\int_0^t \frac{1}{s}e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\mathcal{F}\,T^0_\Omega(e^{is\Delta}xe^{-is\Delta}u,u) + \text{termes semblables}
\end{aligned}$$

où on note
$$T^0_\Omega(e^{is\Delta}xe^{-is\Delta}u,u) = \sum_j T^j_\Omega(e^{is\Delta}x_je^{-is\Delta}u,u).$$

D'où

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e^{it\Delta}u_0(x) - \int_0^t \frac{1}{s}e^{i(t-s)\Delta}R_\Omega(u,u)ds \\ &\quad +c\int_0^t \frac{1}{s}e^{i(t-s)\Delta}T^0_\Omega(e^{is\Delta}xe^{-is\Delta}u,u)ds + \text{termes semblables.} \end{aligned}$$

Dans cette dernière expression, on a très formellement gagné une décroissance en temps supplémentaire en $\frac{1}{s}$ alors que la nonlinéarité est resté quadratique. Un nouveau terme est en outre apparu qui serait à prendre en compte dans la norme X (en ajoutant par exemple $\|xe^{-it\Delta}u\|_2$; pour plus détails, on se référera à [5]).

4.5 Un exemple avec perte de dérivées

On se place en dimension 3 et on considère l'équation suivante :

$$i\partial_t u + \Delta u = (\nabla\bar{u})^2 = \nabla\bar{u}\cdot\nabla\bar{u}. \tag{15}$$

pour laquelle on admet qu'elle admet une solution régulière lorsque la donnée initiale est régulière. L'objectif est de montrer que cette solution est globale lorsque la donnée initiale est assez petite.

4.5.1 Énergie

L'objet de ce paragraphe est de montrer une estimée d'énergie dont la preuve nécessite le résultat suivant. La démonstration de cet énoncé peut être trouvée dans [7].

Théorème 4.3 (Gagliardo-Nirenberg)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ et j, m deux entiers naturels tels que :*

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{d} = \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{m}{d}\right) + \frac{1-\theta}{r}$$

où
$$\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Alors :
$$\|\partial^\alpha f\|_p \leq c\sum_{|\beta|=m}\|\partial^\beta f\|_q^\theta \|f\|_r^{1-\theta}$$

avec $|\alpha| = j$ et $c = c(j,m,p,q,r)$.

On peut maintenant prouver le théorème suivant :

Théorème 4.4. *Si u est solution de* (15)*, alors u vérifie pour N assez grand l'estimation suivante :*

$$\|u(t)\|_{H^N}^2 \leq c\|u_0\|_{H^N}^2 \exp\left(\int_0^t \|u(s)\|_{W^{2,\infty}} ds\right).$$

Preuve. En notant $u_1 = \Re(u)$ et $u_2 = \Im(u)$, on se ramène au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t u_1 + \Delta u_2 &=& -2\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \\ -\partial_t u_2 + \Delta u_1 &=& (\nabla u_1)^2 - (\nabla u_2)^2. \end{array}\right.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et notons $N = |\alpha|$. On dérive les deux équations α fois :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t \partial^\alpha u_1 + \Delta\partial^\alpha u_2 &=& -2\nabla(\partial^\alpha u_1)\cdot\nabla u_2 - 2\nabla u_1 \cdot \nabla(\partial^\alpha u_2) + R_1 \\ -\partial_t\partial^\alpha u_2 + \Delta\partial^\alpha u_1 &=& 2\nabla(\partial^\alpha u_1)\nabla u_1 - 2\nabla(\partial^\alpha u_2)\nabla u_2 + R_2. \end{array}\right.$$

où R_1 et R_2 sont des termes sans dérivée d'ordre $> |\alpha|$. En multipliant la première ligne par $\partial^\alpha u_1$, la seconde par $-\partial^\alpha u_2$, en sommant et en intégrant sur $\mathbb{R}^d$, on trouve :

$$\begin{aligned} &\partial_t \int_{\mathbb{R}^d} (\partial^\alpha u_1)^2 + (\partial^\alpha u_2)^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \Delta(\partial^\alpha u_2)\partial^\alpha u_1 - \Delta(\partial^\alpha u_1)\partial^\alpha u_2 \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_1 \{\underbrace{\nabla(\partial^\alpha u_1)\cdot\nabla u_2}_{(a)} + \underbrace{\nabla u_1 \cdot \nabla(\partial^\alpha u_2)}_{(b)}\} - 2\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_2 \{\underbrace{\nabla(\partial^\alpha u_1)\nabla u_1}_{(c)} - \underbrace{\nabla(\partial^\alpha u_2)\nabla u_2}_{(d)}\} + R \end{aligned}$$

où R est une combinaison linéaire de termes de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_i \partial^{\alpha-\beta}(\partial_l u_j)\partial^\beta(\partial_l u_k)$$

où $1 \leq |\beta| \leq |\alpha| - 1$, $l \in \{1, ..., d\}$ et $i, j, k \in \{1, 2\}$.

Or, une intégration par parties donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Delta(\partial^\alpha u_2)\partial^\alpha u_1 - \Delta(\partial^\alpha u_1)\partial^\alpha u_2 = \Im \int_{\mathbb{R}^d} \Delta(\partial^\alpha u)\partial^\alpha \bar{u} = 0.$$

Majorons les termes de droite :

- D'une part, on a :

$$\begin{aligned} (a) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_1 \nabla(\partial^\alpha u_1)\cdot\nabla u_2 &= \sum_j \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_1 \partial_j(\partial^\alpha u_1)\partial_j u_2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_j \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u_2 \partial_j\left((\partial^\alpha u_1)^2\right) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j^2 u_2 (\partial^\alpha u_1)^2 \end{aligned}$$

et de même :

$$(d) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_2 \nabla(\partial^\alpha u_2)\cdot\nabla u_2 = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \partial_j^2 u_2 (\partial^\alpha u_2)^2.$$

D'où,

$$|(a)|+|(d)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_1 \nabla(\partial^\alpha u_1)\cdot\nabla u_2\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_2 \nabla(\partial^\alpha u_2)\cdot\nabla u_2\right| \leq c\|u\|_{W^{2,\infty}}\|u\|_{H^N}^2.$$

- Et d'autre part :

$$
\begin{aligned}
|(b)+(c)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha u_1 \nabla u_1 \nabla(\partial^\alpha u_2) + \partial^\alpha u_2 \nabla(\partial^\alpha u_1) \nabla u_1 \right| \\
&\leq \sum_j \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u_1 (\partial^\alpha u_1 \partial_j(\partial^\alpha u_2) + \partial^\alpha u_2 \partial_j(\partial^\alpha u_1)) \right| \\
&\leq \sum_j \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j u_1 \partial_j (\partial^\alpha u_1 \partial^\alpha u_2) \right| \leq \sum_j \left| \int_{\mathbb{R}^d} \partial_j^2 u_1 \partial^\alpha u_1 \partial^\alpha u_2 \right| \\
&\leq c\|u\|_{W^{2,\infty}} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial^\alpha u_1)^2 + (\partial^\alpha u_2)^2 \ \leq \ c\|u\|_{W^{2,\infty}} \|u\|_{H^N}^2 .
\end{aligned}
$$

- Reste à estimer R. L'inégalité de Hölder donne :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |\partial^\alpha u_i \partial^{\alpha-\beta}(\partial_l u_j) \partial^\beta(\partial_l u_k)| &\leq \|\partial^\alpha u_i\|_2 \|\partial^{\alpha-\beta}(\partial_l u_j)\partial^\beta(\partial_l u_k)\|_2 \\
&\leq \|u(t)\|_{H^N} \|\partial^{\alpha-\beta}(\partial_l u_j)\|_p \|\partial^\beta(\partial_l u_k)\|_q
\end{aligned}
$$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2}$ que l'on spécifiera plus tard.

On va appliquer l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg 4.3 aux normes p et q. On note $|\alpha| = N$:

$$
\|\partial^\beta(\partial_l u_k)\|_q \leq c \sum_{|\gamma|=N-1} \|\partial^\gamma(\partial_j u_k)\|_2^\theta \|\partial_l u_k\|_\infty^{1-\theta} \leq c\|u(t)\|_{H^N}^\theta \|u(t)\|_{W^{2,\infty}}^{1-\theta}.
$$

avec

$$
\theta = \frac{|\beta| - \frac{d}{q}}{N - 1 - \frac{d}{2}}.
$$

Et de même :

$$
\|\partial^{\alpha-\beta}(\partial_l u_k)\|_q \leq c \sum_{|\gamma|=N-1} \|\partial^\gamma(\partial_j u_k)\|_2^{\tilde\theta} \|\partial_l u_k\|_\infty^{1-\tilde\theta} \leq c\|u(t)\|_{H^N}^{\tilde\theta} \|u(t)\|_{W^{2,\infty}}^{1-\tilde\theta}
$$

avec

$$
\tilde\theta = \frac{N - |\beta| - \frac{d}{p}}{N - 1 - \frac{d}{2}} \quad \text{et} \quad \theta + \tilde\theta = 1.
$$

Ces majorations sont licites dès que :

$$
\frac{|\beta|}{N-1} \leq \theta \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{N - |\beta|}{N-1} \leq \tilde\theta \leq 1
$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{2}{q}(N-1) \leq |\beta| \leq N-1-\frac{d}{p} & (1) \\ 1+\frac{d}{q} \leq |\beta| \leq N-\frac{2}{p}(N-1) & (2) \end{cases}$$

Jusque là, on a supposé $1 \leq |\beta| \leq N-1$ mais comme R est symétrique, il suffit de traiter d'abord le cas $|\beta| = N-1$, ce qui est immédiat puisqu'alors :

$$\begin{aligned} \|\partial^{\alpha-\beta}(\partial_l u_j)\partial^\beta(\partial_l u_k)\|_2 &= \|\partial^2 u_j \partial^\gamma u_k\|_2 \\ &\leq \|u(t)\|_{W^{2,\infty}}\|u(t)\|_{H^N} \end{aligned}$$

où $|\gamma| = N$. Et il suffit ensuite de choisir p et q tels que (1) implique (2) ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} 1+\frac{d}{q} \leq \frac{2}{q}(N-1) \\ \\ N-1-\frac{d}{p} \leq N-\frac{2}{p}(N-1) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} q \leq 2(N-1)-d \\ p \geq 2(N-1)-d \end{cases}$$

et de tels $1 \leq p, q \leq \infty$ vérifiant $1/p + 1/q = 1/2$ existent lorsque N est suffisamment grand.

En conclusion, on a montré que :

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H^N}^2 \leq c\|u(t)\|_{W^{2,\infty}}\|u(t)\|_{H^N}^2$$

et le lemme de Gronwall conduit au résultat. □

4.5.2 Résonance en temps

Comme précédemment, on pose $f = e^{-it\Delta}u$ et on calcule :

$$\hat{f}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) - i\int_0^t e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\mathcal{F}((\nabla\bar{u})^2)ds$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((\nabla\bar{u})^2) &= \mathcal{F}((\nabla e^{-it\Delta}\bar{f})^2) \\ &= c\int_\eta \eta\cdot(\xi-\eta)\hat{\bar{f}}(s,\eta)\hat{\bar{f}}(s,\xi-\eta)d\eta. \end{aligned}$$

D'où

$$\hat{f}(t,\xi) = \widehat{u_0}(\xi) + c\int_0^t\int_\eta e^{i\Omega s}\eta\cdot(\xi-\eta)\hat{\bar{f}}(s,\eta)\hat{\bar{f}}(s,\xi-\eta)d\eta ds$$

avec

$$\Omega = 4\pi^2(|\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi-\eta|^2).$$

Ici, $\mathscr{T} = \{(0,0)\}$ [2] mais la résonance est compensée par $\eta \cdot (\xi - \eta)$ qui s'annule à l'ordre 2 lorsque $\xi = \eta = 0$, on peut donc intégrer par parties en s :

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t,\xi) &= \widehat{u_0}(\xi) + c\int_0^t \int_\eta \frac{1}{i\Omega}\partial_s(e^{i\Omega s})\eta \cdot (\xi-\eta)\hat{\bar{f}}(s,\eta)\hat{\bar{f}}(s,\xi-\eta)d\eta ds \\
&= \widehat{u_0}(\xi) + c\int_0^t \int_\eta e^{i\Omega s}\frac{1}{i\Omega}\eta \cdot (\xi-\eta)\partial_s\hat{\bar{f}}(s,\eta)\hat{\bar{f}}(s,\xi-\eta)d\eta ds \\
&\qquad + c\left[\int_\eta e^{i\Omega s}\frac{\eta\cdot(\xi-\eta)}{i\Omega}\hat{\bar{f}}(s,\eta)\hat{\bar{f}}(s,\xi-\eta)d\eta\right]_0^t + \text{termes semblables}
\end{aligned}$$

Or,

$$\partial_s f(s,\eta) = -ie^{-is\Delta}(\nabla\bar{u})^2$$

donc

$$\partial_s\hat{\bar{f}}(s,\eta) = \mathcal{F}(ie^{is\Delta}(\nabla u)^2) = ie^{-4i\pi^2|\eta|^2 s}\mathcal{F}((\nabla u)^2).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(t,\xi) &= \widehat{u_0}(\xi) + c\int_0^t e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\int_\eta \frac{1}{i\Omega}\eta\cdot(\xi-\eta)\mathcal{F}((\nabla u)^2)(s,\eta)\hat{\bar{u}}(s,\xi-\eta)d\eta ds \\
&\qquad + c\left[e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\int_\eta \frac{\eta\cdot(\xi-\eta)}{i\Omega}\hat{\bar{u}}(s,\eta)\hat{\bar{u}}(s,\xi-\eta)d\eta\right]_0^t + \text{termes semblables} \\
&= \widehat{u_0}(\xi) + c\int_0^t e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\mathcal{F}B[(\nabla u)^2,\bar{u}]ds + c\left[e^{4i\pi^2|\xi|^2 s}\mathcal{F}B(\bar{u},\bar{u})(s,\xi)\right]_0^t + \text{termes semblables}
\end{aligned}$$

où on note B le pseudo produit :

$$B(f,g) = \mathcal{F}^{-1}\int_\eta \frac{\eta\cdot(\xi-\eta)}{|\xi|^2+|\eta|^2+|\xi-\eta|^2}\hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)d\eta.$$

Finalement,

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0(x) + c\left[B(\bar{u},\bar{u})(t,x) - e^{it\Delta}B(\bar{u},\bar{u})(0,x)\right] + c\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2,\bar{u}]ds.$$

4.5.3 Dispersion et existence globale

On considère la norme :

$$\|u\|_{X(T)} = \sup_{t\in[0,T]}\{\|u(t)\|_{H^N} + (1+t)^{6/5}\|u(t)\|_{W^{1,10}}\}.$$

Comme pour le théorème 3.2, on va montrer une estimation du type :

$$\|u\|_{X(T)} \le \varepsilon + F\left(\|u\|_{X(T)}\right)$$

2. voir note 1 page 31

où F vérifie les hypothèse du lemme 3.1.

Étape 1 : contrôle de $\|e^{it\Delta}u_0\|_{W^{1,10}}$

La preuve est identique à celle du théorème 3.2 : lorsque $t \geq 1$, on utilise l'inégalité de dispersion 1.15 et lorsque $t \leq 1$ on utilise l'injection $H^2 \hookrightarrow W^{1,10}$.

Étape 2 : contrôle de $\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds\right\|_{W^{1,10}}$

• Lorsque $t \geq 1$, on écrit :

$$\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds = \int_0^{t-1} e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds + \int_{t-1}^t e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds$$

et on majore successivement grâce à l'inégalité de dispersion 1.15 :

$$\left\|\int_0^{t-1} e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds\right\|_{10} \leq c\int_0^{t-1} \frac{1}{(t-s)^{6/5}}\|B[(\nabla u)^2, \bar{u}]\|_{10/9}ds.$$

Le théorème de Coifman-Meyer 4.2 assure :

$$\|B[(\nabla u)^2, \bar{u}]\|_{10/9} \leq \|(\nabla u)^2\|_{5/4}\|u\|_{10} \leq c\|\nabla u\|_{5/2}^2\|u\|_{W^{1,10}}$$

et comme $H^1 \hookrightarrow L^6$:

$$\|\nabla u\|_{5/2} \leq \|\nabla u\|_2^{\theta}\|\nabla u\|_6^{1-\theta} \leq \|u(t)\|_{H^N}$$

avec $\theta/2 + (1-\theta)/6 = 2/5$ et $N \geq 2$. Ainsi,

$$\left\|\int_0^{t-1} e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds\right\|_{10} \leq c\|u\|_{X(T)}^3 \int_0^{t-1} \frac{ds}{(1+s)^{6/5}(t-s)^{6/5}}$$

et on montre, comme pour le théorème 3.2, que :

$$\int_0^{t-1} \frac{ds}{(1+s)^{6/5}(t-s)^{6/5}} = \mathcal{O}(t^{-6/5}).$$

On majore ensuite le second terme en remarquant qu'en dimension 3, $H^s \hookrightarrow L^{10}$ dès que $s \geq 1/5$. En particulier :

$$\left\|\int_{t-1}^t e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds\right\|_{10} \leq \left\|\int_{t-1}^t e^{i(t-s)\Delta}B[(\nabla u)^2, \bar{u}]ds\right\|_{H^1} \leq \int_{t-1}^t \|B[(\nabla u)^2, \bar{u}]\|_{H^1}ds.$$

Or le théorème de Coifman-Meyer 4.2 permet de justifier :

$$\|B[(\nabla u)^2, \bar{u}]\|_{H^1} \leq c\|(\nabla u)^2(s)\|_{W^{1,p}}\|u(s)\|_{W^{1,10}} \leq c\|\nabla u\|_{W^{1,2p}}^2\|u\|_{W^{1,10}}$$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{2}$ *i.e.* $p = 5/2$. Et comme $2p = 5 \in (2, 6)$, on a comme précédemment,

$$\|B[(\nabla u)^2, \bar{u}]\|_{H^1} \leq c\|u(s)\|_{H^N}^2\|u(s)\|_{W^{1,10}}.$$

Ce qui montre que :

$$\left\| \int_{t-1}^{t} e^{i(t-s)\Delta} B[(\nabla u)^2, \bar{u}] ds \right\|_{10} \leq c \|u\|_{X(T)}^3 \int_{t-1}^{t} \frac{ds}{s^{6/5}} \leq \frac{c}{t^{6/5}} \|u\|_{X(T)}^3.$$

- Lorsque $t \leq 1$, on procède comme pour l'étape 1 en écrivant que $\| \cdot \|_{10} \leq c \| \cdot \|_{H^1}$.

Le contrôle en norme $W^{1,10}$ se fait de la même façon.

Étape 3 : contrôle des termes de bord.

- En norme 10, il suffit d'écrire une nouvelle fois :

$$\|B(\bar{u}, \bar{u})\|_{10} \leq c \|B(\bar{u}, \bar{u})\|_{H^1} \leq c \|u\|_{W^{1,5/2}} \|u\|_{W^{1,10}} \leq c \frac{\|u\|_{X(T)}^2}{(1+t)^{6/5}}.$$

- En norme H^N, on revient à la définition de B :

$$\|B(\bar{u}, \bar{u})\|_{H^N} = \left(\int_\xi (1+|\xi|^2)^N \left| \int_\eta \frac{\eta \cdot (\xi - \eta)}{|\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2} \hat{\bar{u}}(s, \eta) \hat{\bar{u}}(s, \xi - \eta) d\eta \right|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

et on utilise l'inégalité arithmético-géométrique pour montrer que

$$\left| \frac{\eta \cdot (\xi - \eta)}{|\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|\eta|^2 + |\xi - \eta|^2}{|\xi|^2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2} \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\|B(\bar{u}, \bar{u})(s)\|_{H^N} \leq c \|u(s)\|_{H^N}^2 \leq c \|u\|_{X(T)}^2.$$

Étape 4 : contrôle de $\|u(t)\|_{H^N}$.

On commence par écrire que $\| \cdot \|_{W^{2,\infty}} \leq \| \cdot \|_{W^{3,10}}$, ce qui est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.5. *On a l'injection $W^{1,10} \hookrightarrow L^\infty$.*

PREUVE. Soit $u \in W^{1,10}$. Quitte à translater, il suffit de majorer $|u(0)|$ par $c\|u\|_{W^{1,10}}$. Écrivons :

$$\left| u(0) | - \frac{1}{|B|} \int_{B(0,1)} u(x) dx \right| = \left| \frac{1}{|B|} \int_{B(0,1)} u(0) - u(x) dx \right|$$

où $|B|$ désigne le volume de la boule unité $B(0,1)$. Grâce à la formule de Taylor et en passant en coordonnées polaires on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| u(0)| - \frac{1}{|B|}\int_{B(0,1)} u(x)dx \right| &= \frac{1}{|B|}\left| \int_{B(0,1)} \int_0^1 du\left(r\frac{x}{|x|}\right).x\, drdx \right| \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_{B(0,1)} \int_0^1 \left| \nabla u\left(r\frac{x}{|x|}\right)\right| drdx \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq \frac{1}{|B|}\int_{\mathbb{S}^d} \int_0^1 \int_0^1 |\nabla u(r\omega)| dr\rho^{d-1} d\rho d\omega \\
&\leq \frac{1}{d|B|}\int_{\mathbb{S}^d} \int_0^1 |\nabla u(r\omega)| drd\omega \qquad \text{(Fubini)} \\
&\leq c\int_{\mathbb{S}^d} \int_0^1 \frac{|\nabla u(r\omega)|}{r^{d-1}} r^{d-1} drd\omega \\
&\leq c\int_{B(0,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y|^{d-1}} dy
\end{aligned}$$

L'inégalité de Hölder montre alors que :

$$\int_{B(0,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y|^{d-1}} dy \leq \|\nabla u\|_p \left\| \frac{1}{|y|^{d-1}} \right\|_{p'}$$

dès que $1/|y|^{d-1}$ est intégrable, ce qui équivaut à $p'(d-1) < d$ *i.e.* $p > d$. C'est bien le cas pour $p = 10$ et $d = 3$. Et puisque

$$\left| \int_{B(0,1)} u(x)dx \right| \leq \mu(B(0,1))^{1/p'} \|u\|_p$$

on peut conclure :

$$|u(0)| \leq c\|u\|_{W^{1,10}}.$$

□

La décroissance en $t^{-6/5}$ de $\|u(t)\|_{W^{3,10}}$ se fait comme celle de la norme $W^{1,10}$ et on peut conclure grâce au théorème 4.4 et aux trois précédentes étapes :

$$\|u(t)\|_{H^N}^2 \leq c\|u_0\|_{H^N}^2 e^{\varepsilon_0 + c\left(\|u\|_{X(T)}^2 + \|u\|_{X(T)}^3\right)}.$$

Étape 5 : conclusion.

On a finalement montré l'inégalité suivante :

$$\|u\|_{X(T)} \leq \varepsilon_0 + c\left(\|u\|_{X(T)}^2 + \|u\|_{X(T)}^3\right) + \varepsilon_0 e^{\varepsilon_0 + c\left(\|u\|_{X(T)}^2 + \|u\|_{X(T)}^3\right)}$$

où ε_0 est d'autant plus petit que u_0 l'est dans $H^N \cap W^{1,10/9}$. Le lemme 3.1 permet de montrer la finitude de $\|u\|_X = \sup_T \|u\|_{X(T)}$ lorsque u_0 est suffisamment petit. L'existence globale découle alors du théorème 2.12.

Notations et conventions

- Lorsque x et y sont dans $\mathbb{R}^d$, on note $|\cdot|$ la norme euclidienne et $x \cdot y$ le produit scalaire euclidien.
- $\mathcal{F}(u)$ et $\hat{u}$ désignent la transformée de Fourier en espace de $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ avec la convention suivante :

$$\mathcal{F}(u)(t, \xi) = \hat{u}(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$$

  lorsque $u(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On étend ensuite classiquement $\mathcal{F}$ aux fonctions L^2 et aux distributions tempérées.
- Lorsque $p > 1$, on note $p' \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.
- Lorsque X et Y sont des espaces fonctionnels, on note XY l'espace des fonctions $u : X \times Y \to \mathbb{C}$. Typiquement, $X = L^q(\mathbb{R})$ et $Y = L^p(\mathbb{R}^d)$ et dans ce cas $L^q L^p$ est muni de la norme

$$\|u\|_{L^q L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(t, \cdot)\|_p dt \right)^{1/q}.$$

- c désigne une constante (par rapport à toutes les autres variables) dont la valeur peut changer d'une ligne sur l'autre et au sein d'une même ligne.

Références

[1] N. Laillet. Résonances en espace et en temps pour l'équation de Schrödinger dans R3 avec une nonlinéarité quadratique. Mémoire de Master, 2011.

[2] J. Bergh ; J. Löfström. *Interpolation Spaces, An Introduction.* Springer, 1976.

[3] F. Linares ; G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Springer, 2009.

[4] R. Danchin ; P. Raphaël. *Analyse non linéaire - Sur la stabilité des ondes solitaires.*

[5] P. Germain ; N. Masmoudi ; J. Shatah. Global Solutions for 3D Quadratic Schrödinger Equations. *IMRN*, 2009.

[6] P. Germain ; N. Masmoudi ; J. Shatah. Global Solutions for the Gravity Water Waves Equation in Dimension 3. *Ann. of Math.*, 2012.

[7] Michael E. Taylor. *Partial Differential Equations III.* Springer, 2011.