À propos de l'équation de Schrödinger linéaire.

Il faut un peu adapter pour pouvoir présenter ce développement : je pense qu'une bonne solution est de tout montrer sauf l'unicité au sens faible et d'éventuellement rajouter la transformée de Fourier de la gaussienne. Le détail de l'unicité pour les solutions faibles est probablement dangereux à présenter. À noter que PLEIN de leçons d'analyse peuvent contenir ce développement au moins en exemple : 201, 202, 205, 207, 208, 213, 222, 234, 235, 239, 241, 250…

On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d) \\ u(0,\cdot) = u_0 \in H^s(\mathbf{R}^d), \quad s\in\mathbf{R} \end{cases} \tag{S}$$

On va d'abord s'intéresser aux solutions *tempérées* de (S).

Théorème 1 (Solutions tempérées)**.** *Pour tout $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$, il existe une unique solution de* (S) *appartenant à $C^\infty(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^d))$.*

Preuve. Soit u une telle solution. Alors en prenant la transformée de Fourier selon x de (S), on trouve[1] :

$$\partial_t \hat{u} = \widehat{i\Delta u}(t,\xi) = -4i\pi^2|\xi|^2\hat{u}(t,\xi).$$

C'est une équation différentielle linéaire en t avec un paramètre ξ. Son unique solution s'écrit :

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi).$$

On en déduit l'unique solution tempérée de (S) en prenant la transformée de Fourier inverse dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$. Et il n'y a pas de problème pour dériver indéfiniment en t puisque tout est dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$. □

Il convient de remarquer que l'on peut écrire cette solution :

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0(x)$$

où on a défini pour $t\in\mathbf{R}$, l'opérateur :

$$\begin{array}{rccc} e^{it\Delta} : & \mathscr{S}(\mathbf{R}^d) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbf{R}^d) \\ & f & \longmapsto & e^{it\Delta}f := \mathcal{F}^{-1}\big(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{f}\big). \end{array}$$

Lemme 2. *Listons quelques propriétés importantes :*

- *L'opérateur $e^{it\Delta}$ se prolonge de manière unique en une isométrie de $H^s(\mathbf{R}^d)$:*

$$\forall f\in H^s(\mathbf{R}^d), \quad \|e^{it\Delta}f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s} \tag{1}$$

- *Pour tout $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, $e^{i(t_1+t_2)\Delta} = e^{it_1\Delta}e^{it_2\Delta}$.*
- *Pour tout $f\in H^s(\mathbf{R}^d)$, $e^{it\Delta}f \in C^0(\mathbf{R}, H^s)$*

[1] La régularité est importante : le théorème de convergence dominée permet de montrer que si $u \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^d))$, alors $t\mapsto \widehat{u(t)}$ est aussi dans $C^\infty(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^d))$, ce qui justifie la notation $\hat{u}(t,\xi)$. Mais ça ne suffirait pas de supposer que pour tout $t\in\mathbf{R}$, $u(t)\in\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ (voir un contre-exemple à la fin du développement sur l'équation de la chaleur).

Preuve. • Comme $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbf{R}^d)$, il suffit de vérifier (1) pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ pour conclure grâce au théorème de prolongement des applications linéaires continues. Par définition de la norme H^s :

$$\|e^{it\Delta}f\|_{H^s} = \left\|e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}\right\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} = \|f\|_{H^s}.$$

- La propriété de semi-groupe se lit dans la définition pour $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ et demeure vraie dans H^s par densité et continuité.
- Vérifions la continuité en $t = 0$: pour tout $g \in H^s(\mathbf{R}^d)$,

$$\|e^{it\Delta}g - g\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbf{R}^d}(1+|\xi|^2)^s\left|(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}-1)\hat{g}(\xi)\right|^2 d\xi \longrightarrow 0$$

par convergence dominée.

□

Théorème 3. *Pour tout $u_0 \in H^s(\mathbf{R}^d)$, le problème est bien posé dans $C^0(\mathbf{R}, H^s) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$: $u = e^{it\Delta}u_0 \in C^0(\mathbf{R}, H^s)$ est l'unique solution de* (S).

Preuve. **Existence.** Avant toute chose, il faut préciser le sens que l'on donne à la distribution $u = e^{it\Delta}u_0$ (c'est à dire au sens de l'injection $C^0(\mathbf{R}, H^s) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$) . Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$, on définit :

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{R}} \big\langle u(t,\cdot), \varphi(t,\cdot)\big\rangle dt$$

et on vérifie que c'est bien une distribution : supposons que φ soit à support dans $K_t \times K_x$.

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq \int_{\mathbf{R}^d}\|u(t)\|_{H^s}\|\varphi(t)\|_{H^{-s}}dt \leq \|u_0\|_{H^s}\int_{K_t}\|\varphi(t)\|_{H^{-s}}dt.$$

Et on voit que :

$$\|\varphi(t)\|_{H^{-s}}^2 \leq \|\varphi(t)\|_{H^{\lfloor |s|\rfloor+1}}^2 \leq C(K_x)\sum_{|\alpha|\leq\lfloor |s|\rfloor+1}\|\partial_x^\alpha\varphi(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}^2.$$

Montrons maintenant que u est solution de (S) au sens des distributions. Considérons une suite $(u_0^n)_n$ d'éléments de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ qui converge vers u_0 dans $H^s(\mathbf{R}^d)$ et posons $u^n = e^{it\Delta}u_0^n$. Alors pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$:

$$|\langle u^n - u, \varphi\rangle| \leq \|u_0^n - u_0\|_{H^s}\cdot C\sum_{|s|+1}\|\partial_x^\alpha\varphi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \to 0$$

donc $u^n \to u$ au sens des distributions. Pareil pour leurs dérivées à tout ordre et donc :

$$i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d).$$

Et par continuité de $e^{it\Delta}$ par rapport à t, on a bien sûr $u \in C^0(\mathbf{R}, H^s)$ et $u(0) = u_0$.

Unicité. Pour une équation homogène linéaire, il suffit de montrer que la solution nulle est l'unique solution lorsque $u_0 = 0$. Soit donc u une solution de (**??**) avec $u_0 = 0$. L'idée générale pour montrer l'unicité de la solution des problèmes linéaires est de se ramener à montrer l'existence pour le problème dual inhomogène. Plus précisément il s'agit d'écrire :

$$\langle \partial_t u - i\Delta u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0 \iff \langle u, \partial_t \varphi + i\Delta\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0.$$

Dans $C^0(\mathbf{R}, H^s)$ cela équivaut à :

$$\int_{\mathbf{R}} \big\langle u(t,\cdot), \big(\partial_t\varphi + i\Delta\varphi\big)(t,\cdot)\big\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}\, dt = 0 \tag{2}$$

Et on veut montrer :

$$\forall T \in \mathbf{R},\ \ u(T,\cdot) = 0 \ \text{ dans } \ H^s(\mathbf{R}^d) \ \ i.e \ \ \forall T \in \mathbf{R},\ \forall h \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d),\ \ \langle u(T,\cdot), h\rangle = 0.$$

De deux choses l'une : d'abord, on remarque que $\mathscr{S}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d) \subset C^\infty(\mathbf{R}; \mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ et ensuite on sait résoudre le problème dual :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\varphi + i\Delta\varphi &=& 0 \ \text{ dans } \mathscr{S}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d) \\ \varphi(T,\cdot) &=& h \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^d) \end{array}\right.$$

il suffit de prendre $\varphi(t,x) = e^{-i(t-T)\Delta}h$. La conclusion suit alors directement de l'identité *IPP-like* :

$$\forall T > 0,\ \int_0^T \big\langle u(t,\cdot), \big(\partial_t\varphi + i\Delta\varphi\big)(t,\cdot)\big\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}\, dt = \langle u(T,\cdot), \varphi(T,\cdot)\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$$

laquelle résulte[2] d'un jeu de découpages-collages.

Étape 1. On montre que pour tous $t_1 < t_2$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \big\langle u(t,\cdot), \partial_t\varphi(t,\cdot) + i\Delta\varphi(t,\cdot)\big\rangle dt = \big\langle u(t_2), \varphi(t_2)\big\rangle - \big\langle u(t_1), \varphi(t_1)\big\rangle.$$

Prenons pour tout n suffisamment grand, $\chi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ dont le support est contenu dans $[t_1, t_2]$ et valant 1 sur $[t_1 + 1/n, t_2 - 1/n]$. Alors (2) appliqué à $\chi_n\varphi$ s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t^1}^{t_2} \big\langle u(t), (\partial_t + i\Delta)(\chi_n\varphi)(t)\big\rangle dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \big\langle u(t), \chi_n(\partial_t + i\Delta)(\varphi(t))\big\rangle dt + \int_{t_1}^{t_2} \big\langle u(t), \chi_n'(t)\varphi(t)\big\rangle dt =: I_1^n + I_2^n \end{aligned}$$

La quantité $|I_1^n|$ est majorée indépendamment de n par les mêmes calculs que précédemment et par le théorème de convergence dominée :

$$I_1^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} \big\langle u(t), (\partial_t + i\Delta)(\varphi(t))\big\rangle dt.$$

Quant à I_2^n, on écrit :

$$I_2^n = \int_{t_1}^{t_1+1/n} \langle u(t), \chi_n'(t)\varphi(t)\big\rangle dt + \int_{t_2-1/n}^{t_2} \langle u(t), \chi_n'(t)\varphi(t)\big\rangle dt$$

[2] Pour B. Perthame dans *Transport Equations in Biology* page 153, c'est évident mais j'ai pas compris pourquoi.

et pour la première intégrale :

$$\int_{t_1}^{t_1+1/n} \langle u(t), \chi_n'(t)\varphi(t)\rangle dt = \int_{t_1}^{t_1+1/n} \chi_n'(t) \underbrace{\Big(\big\langle u(t), \varphi(t)\big\rangle - \big\langle u(t_1), \varphi(t_1)\big\rangle\Big)}_{\to 0} dt + \langle u(t_1), \varphi(t_1)\rangle.$$

Idem pour la seconde intégrale. Le résultat annoncé s'ensuit. Tout cela est vrai parce que $\chi_n\varphi(t)$ converge vers $\varphi(t)$ dans $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$

Étape 2. Le résultat tient toujours lorsque $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathscr{S}(\mathbf{R}^d))$.

Il suffit d'appliquer l'étape 1 à $\chi_1(t)\chi_2(\varepsilon x)\varphi(t,x)$ où $\chi_1 \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ vaut 1 sur $[t_1, t_2]$ et $\chi_2 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ vaut 1 en 0. Le théorème de convergence dominée permet de conclure.

□

Quelques remarques complémentaires

- On dispose d'une formule explicite pour calculer $e^{it\Delta}f$ lorsque $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$:

$$(e^{it\Delta}f)(x) = \left(\frac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{(4\pi i t)^{d/2}} * f\right)(x)$$

  ce que l'on peut voir en calculant la transformée de Fourier d'une gaussienne de paramètre complexe. La distribution :

$$E(t,x) = \frac{e^{i|x|^2/4t}}{(4\pi i t)^{d/2}} \quad \text{si } t > 0 \quad \text{et} \quad E(0,\cdot) = \delta \in H^{-d/2-\varepsilon}$$

  vérifie $E(t) = e^{it\Delta}\delta$ et est appelée solution fondamentale puisqu'on obtient toutes les autres solutions en fonction de cette solution.

- De l'intérêt de chercher un solution dans H^s : pour $s = 1$, H^1 est l'espace d'énergie. Et comme $\delta \in H^{d/2-\varepsilon}$ c'est comme ça qu'on justifie la définition de la solution fondamentale.

- C'est une EDP dispersive qui ne rentre pas dans la classification standard des EDP linéaires d'ordre 2.

- On n'a pas utilisé la forme de $e^{it\Delta}$: c'est une méthode assez générale pour les problèmes du type $P(\partial_t, \partial_x)u = 0$. En particulier, on peut faire pareil pour l'équation de la chaleur, des ondes.

- Lorsque l'équation n'est plus homogène, on dispose de la formule de Duhamel :

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 - i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}F(s)ds.$$

Référence. J. Rauch, *Partial differential equations*

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.
250 Transformation de Fourier. Applications.
+ toutes celles citées au début.