Autour des endomorphismes semi-simples.

On se place dans E, un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple lorsque tout sous-espace vectoriel de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Lemme. *Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension de corps. Alors $\Pi_{f,\mathbf{K}} = \Pi_{f,\mathbf{L}}$.*

Preuve. C'est une conséquence de l'indépendance du rang vis à vis du corps de base (qui provient de l'indépendance du résultat du calcul des mineurs). Maintenant, on a déjà :

$$\Pi_{f,\mathbf{L}} | \Pi_{f,\mathbf{K}}$$

et comme ces polynômes sont unitaires, il suffit de montrer qu'ils sont de même degré pour conclure. Or, le degré du polynôme minimal de f sur $\mathbf{L}$ est égal au rang de la famille $(id, f, \dots, f^{n-1})$ dans $\mathcal{L}(E)$ qui est un espace vectoriel de dimension finie n^2. Comme le rang ne dépend pas du corps de base et quitte à tout mettre dans une grosse matrice, on en déduit l'égalité annoncée. $\square$

Lemme. *Soit F un sous-espace stable par f. On note $\Pi_f = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. On a :*

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big[\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f) \cap F \Big].$$

Preuve. Par le lemme des noyaux, on sait que :

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f|_F) = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big[\operatorname{Ker} P_i^{\alpha_i}(f) \cap F \Big]$$

$\square$

Théorème. *Un endomorphisme f est semi-simple si et seulement si son polynôme minimal Π_f est un produit de polynômes irréductibles unitaires distincts deux à deux.*

Preuve. Progressivement :

Étape 1. Lorsque Π_f est irréductible.

On va montrer que f est semi-simple, considérons donc F un sous-espace stable par f. Si $F = E$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit $x \in E \setminus F$ et

$$E_x = \{P(f)(x),\ P \in \mathbf{K}[X]\}.$$

Clairement E_x est stable par f. Pour conclure et quitte à itérer le processus, il suffit de montrer que

F et E_x sont en somme directe.

L'idéal $I_x = \{P \in \mathbf{K}[X],\ P(f)(x) = 0\}$ est non réduit à 0 (il y a Π_f) et principal donc il est engendré par un unique polynôme unitaire Π_x. Comme $\Pi_x | \Pi_f$, ce polynôme est irréductible.

Soit $y = P(f)(x) \in E_x \cap F$ que l'on suppose non nul. Alors $P \notin I_x$, c'est à dire que Π_x ne divise pas P et comme il est irréductible, P et Π_x sont premiers entre eux. Par le théorème de Bézout, on peut écrire :

$$UP + V\Pi_x = 1.$$

On trouve :

$$x = U(f) \circ P(f)(x) = U(f)(y) \in F \text{ car } y \in F.$$

C'est absurde !

Avant de continuer, voici une seconde preuve plus ocnceptuelle de cette première étape : comme Π_f est irréductible, on peut considérer le corps $\mathbf{L} = \mathbf{K}[X]/(\Pi_f)$ et munir E d'une structure de $\mathbf{L}$-espace vectoriel en posant $\bar{P} \cdot x = P(f)(x)$. On note $E_{\mathbf{L}}$ cette nouvelle structure et $E_{\mathbf{K}}$ l'ancienne. On vérifie immédiatement que $F \subset E_{\mathbf{K}}$ est un sous-espace vectoriel stable par f si et seulement si $F \subset E_{\mathbf{L}}$ est un sous-espace vectoriel. Il suffit de considérer G un supplémentaire de F dans $E_{\mathbf{L}}$.

Étape 2. Cas général, condition nécéssaire.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme semi-simple de polynôme minimal $\Pi_f = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$. Supposons qu'il existe $\alpha_i \geq 2$. On écrit alors $\Pi_f = P^2 Q$.

$F = \operatorname{Ker} P(f)$ est un sous-espace stable par f qui admet un supplémentaire stable noté S. Si $x \in S$, alors

- $\Pi_f(f)(x) = P(f)P(f)Q(f)(x) = 0$ donc $P(f)Q(f)(x) \in F$.
- S est stable par f donc $P(f)Q(f)(x) \in S$.

Finalement, $P(f)Q(f)(x) \in F \cap S = \{0\}$ et $P(f)Q(f)$ s'annule sur S.

Mais $P(f)Q(f) = Q(f)P(f)$ donc par définition de F, $P(f)Q(f)$ s'annule aussi sur F. Puisque F et S sont supplémentaires, le polynôme PQ annule f ce qui contredit la minimalité de Π_f.

Étape 3. Cas général, condition suffisante.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme minimal est de la forme $\Pi_f = P_1 \dots P_r$ où les P_i sont des polynômes irréductibles distincts. Soit F un sous-espace stable par f. Pour tout $i \in \{1, \dots r\}$, $F \cap \operatorname{Ker} P_i(f)$ est stable par $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$. Puisque P_i est un polynôme irréductible qui annule $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$, c'est le polynôme minimal de $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$. La première étape fournit l'existence d'un sous-espace S_i stable par $f|_{\operatorname{Ker} P_i(f)}$ (donc par f) tel que :

$$\operatorname{Ker} P_i(f) = (F \cap \operatorname{Ker} P_i(f)) \cap S_i.$$

Il suffit d'écrire :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} \Big[F \cap \operatorname{Ker} P_i(f) \oplus S_i \Big] = \left[\bigoplus_{i=1}^{r} \Big(F \cap \operatorname{Ker} P_i(f) \Big) \right] \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} S_i = F \oplus S$$

et S est stable par f qui est donc semi-simple. $\square$

Lorsque $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, les polynômes irréductibles sont de degré 1 donc f est semi-simple si et seulement si f est diagonalisable. On note maintenant M la matrice de f dans une base et on dit qu'elle est semi-simple lorsque f l'est.

Théorème. *Si le corps $\mathbf{K}$ est de caractéristique nulle, alors M est semi-simple si et seulement s'il existe une extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ dans laquelle M est diagonalisable.*

Preuve. Soit $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle et $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension de corps. On commence par montrer que M est semi-simple sur $\mathbf{K}$ si et seulement si M l'est sur $\mathbf{L}$ (ici, M est à coefficients dans $\mathbf{K}$). Le polynôme minimal de M sur $\mathbf{K}$ est le même que celui de M sur $\mathbf{L}$. Il suffit donc de montrer que Π_M est sans facteur carré dans $\mathbf{K}[X]$ si et seulement s'il est sans facteur carré dans $\mathbf{L}[X]$.

Dans un corps de caractéristique nulle, P est sans facteur carré équivaut à $P \wedge P' = 1$. Mais comme le calcul du pgcd s'effectue dans $\mathbf{K}$, le fait que P et P' soient premiers entre eux ne dépend pas du corps considéré.

Prouvons le théorème : supposons que M est semi-simple dans $\mathbf{K}$. Alors soit $\mathbf{L}$ un corps de décomposition de $\Pi_M \in \mathbf{K}[X]$. Dans $\mathbf{L}[X]$, le polynôme Π_M est scindé à racines simples donc M est diagonalisable. Réciproquement, si M est diagonalisable dans $\mathbf{L}$ alors M est semi-simple dans $\mathbf{L}$ et on vient de montrer que ce fait était équivalent à la semi-simplicité de M sur $\mathbf{K}$. $\square$

Références.
X. Gourdon, *Algèbre*
V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif Agrégation*

122 Anneaux principaux. Applications. *(allez...)*
141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
154 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
155 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.