Les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$.

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie. On commence par un théorème de point fixe.

Théorème (Kakutani)**.** *Soient G un sous-groupe compact de $GL(E)$ et K un convexe compact non vide tel que pour tout $g \in G$, $g(K) \subset K$. Alors il existe $x \in K$ tel que pour tout $g \in G$, $g(x) = x$.*

Preuve. (1) On commence par montrer le résultat où G est remplacé par un singleton. Soit donc $v \in GL(E)$ qui stabilise K. Alors à partir de $x_0 \in K$, on définit la suite :

$$x_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} v^j(x_0).$$

Par compacité, on peur extraire une sous-suite convergente $x_{\varphi(k)} \to x \in K$. Alors :

$$v(x_k) = x_k + \frac{1}{k+1}(v^{k+1}(x_0) - x_0)$$

et en particulier

$$v(x_{\varphi(k)}) = x_{\varphi(k)} + \varepsilon_k$$

où $(\varepsilon_k)_k$ est une suite qui tend vers 0 (car K est v-stable). Par continuité, on a $v(x) = x$.

(2) On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur E et on définit :

$$\|x\|_G = \max_{g \in G} \|g(x)\|.$$

On a écrit max car G est compact. On a défini une norme sur E qui est invariante par G. Étudions le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire : si $x, y \in E$, on a pour un certain $u_0 \in G$:

$$\|x + y\|_G = \|u_0(x) + u_0(y)\| \leq \|u_0(x)\| + \|u_0(y)\| \leq \|x\|_G + \|y\|_G.$$

S'il y a égalité alors $u_0(x)$ et $u_0(y)$ sont positivement liés. Puisque $u_0 \in GL(E)$, c'est aussi le cas de x et y. Réciproquement, c'est aussi vrai.

(3) Par la première étape, on sait que pour tout $u \in G$,

$$K^u = \{x \in K,\ u(x) = x\} \neq \emptyset$$

mais on veut montrer que

$$\bigcap_{u \in G} K^u \neq \emptyset.$$

Comme les K^u sont des fermés du compact K, il suffit de considérer les intersections finies :

$$\bigcap_{1 \leq k \leq p} K^{u_k} \neq \emptyset, \quad p \in \mathbf{N}.$$

On pose avec ces notations :

$$v = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} u_k \quad \text{et} \quad v(x) = x \in K$$

L'existence de x est encore assurée par la première étape. Avec la norme $\|\cdot\|_G$:

$$\|x\|_G = \|v(x)\|_G \leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \|u_k(x)\|_G = \|x\|_G$$

et le cas d'égalité étudié en (2) donne la positive-liaison des $u_k(x)$ et donc leur égalité puisqu'ils sont de même norme $\|\cdot\|_G$. Par suite, x est dans l'intersection des K^{u_k}.

□

Signalons avant de poursuivre une preuve un rien plus concise du théorème de Kakutani : avec le produit scalaire de la deuxième étape, on considère $x \in K$ qui minimise la norme $\|\cdot\|_G$ sur K (c'est un compact) et on montre qu'il convient. Pour cela, on regarde :

$$\frac{1}{2}(x + g(x)) \in K$$

pour $g \in G$. On a :

$$\|x\|_G \leq \|1/2(x + g(x))\|_G \leq \|x\|_G.$$

donc il y a égalité dans l'inégalité triangulaire et x et $g(x)$ sont positivement liés : comme ils ont même norme $\|\cdot\|_G$ ils sont égaux. Ceci est vrai pour tout $g \in G$.

En revanche, la première étape de la preuve est intéressante en elle-même, elle permet par exemple de prouver très simplement un résultat sur les équations différentielles pérodiques ...

Théorème. *Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$. Alors il existe un produit scalaire euclidien $\langle\,,\,\rangle^G$ sur $\mathbf{R}^n$ de forme quadratique associée q^G telle que $G \subset \mathcal{O}(q^G)$*

Preuve. L'idée est d'utiliser le formalisme des actions de groupes pour voir le problème $G \subset \mathrm{Stab}(S)$ pour un certain $S \in \mathscr{S}_n^{++}$ comme un problème de point fixe.

Pour $A \in G$, on pose pour $S \in \mathscr{S}_n$:

$$\rho(A)(S) = ASA^T.$$

On note que $\rho : G \to GL(\mathscr{S}_n)$ est continue car polynômiale. On a défini une action de groupe sur $\mathscr{S}_n$. On regarde maintenant $\mathscr{G} = \rho(G)$. C'est un sous-groupe compact de $GL(\mathscr{S}_n)$.

(1) On regarde $\mathrm{Orb}_\rho(I_n) = \{MM^T,\ M \in G\}$: c'est un compact non vide du convexe $\mathscr{S}_n^{++}$ donc, par le théorème de Carathéodory, c'est aussi le cas de son enveloppe convexe, que l'on note K.

(2) Par construction, K est $\mathscr{G}$-stable car pour tout $A \in G$:

$$\rho(A)(MM^T) = (AM)(AM)^T \in \mathrm{Orb}_\rho(I_n)$$

et on conclut par linéarité.

(3) On utilise le théorème de point fixe de Kakutani : il existe $S \in K \subset \mathscr{S}_n^{++}$ fixé par tous les éléments de $\mathscr{G}$. En termes d'action de groupes,

$$G \subset \mathrm{Stab}_\rho(S)$$

et en termes de formes quadratiques :

$$\forall A \in G, \quad ASA^T = S.$$

On a fini. En prenant la racine carrée de S, on peut aussi écrire :

$$\forall A \in G, \quad (\sqrt{S}^{-1}A\sqrt{S})(\sqrt{S}^{-1}A\sqrt{S})^T = I_n \quad i.e \quad \sqrt{S}^{-1}G\sqrt{S} \subset \mathcal{O}(E).$$

□

Quelques remarques complémentaires.

- Pas de problème sur $\mathbf{C}$ en remplaçant les transposées par des transconjuguées. Du coup, on est dans un espace hermitien.
- Le théorème de Carathéodory dit que dans un espace affine de dimension n, l'enveloppe convexe d'une partie A est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nul de $n+1$ points de A. La conséquence évoquée plus haut, à savoir que l'enveloppe convexe d'un compact est compacte vient du fait suivant :

$$\Lambda_{n+1} \times K^{n+1} \to \mathrm{Conv}(K), \; (\lambda, x) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

  est surjective continue et l'espace de départ est compact.
- En dimension infinie, l'enveloppe convexe d'un compact est précompacte.
- Il y a aussi une preuve qui utilise l'ellipsoïde de John et Loewner !
- Mesure de Haar.

Référence. M. Alessandri, *Thèmes de Géométrie. Groupes en situation géométrique.*

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
150 Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.
170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.
171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
181 Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.