Stabilité et instabilité en première approximation pour les équation différentielles autonomes.

Un lemme d'algèbre linéaire

Fait. *Soient A un endomorphisme de $\mathbf{R}^d$ en $\varepsilon > 0$. Il existe une base dans laquelle la matrice (du complexifié) de A soit triangulaire supérieure avec tous les termes surdiagonaux de module inférieur à ε.*

Preuve. On considère une base (e_i) de trigonalisation de A et on pose $f_i = \alpha^{i-1}e_i$. Le résultat suit pour α suffisamment petit. □

Lemme. *Soit u un endomorphisme de $\mathbf{R}^d$ dont on note $P = P_1P_2$ le polynôme caractéristique où P_1 (resp. P_2) n'à que des racines de partie réelle dans $\mathbf{R}_+^*$ (resp. $\mathbf{R}_-$). On note $E_1 = \operatorname{Ker} P_1(u)$ et $E_2 = \operatorname{Ker} P_2(u)$. Le lemme des noyaux donne $\mathbf{R}^d = E_1 \oplus E_2$. Alors il existe un produit scalaire euclidien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbf{R}^d$ et un réel $\alpha > 0$ tels que si $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée, on a :*

(i) E_1 *et* E_2 *sont orthogonaux pour* $\langle\cdot,\cdot\rangle$

(ii) $\forall h \in E_1,\ \langle df(0)h, h\rangle \geq 2\alpha\|h\|^2$

(iii) $\forall h \in E_2,\ \langle df(0)h, h\rangle \leq \alpha\|h\|^2$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Dans une base adaptée à $\mathbf{R}^d = E_1 \oplus E_2$ telle que la matrice $A = (a_{i,j})_{i,j}$ de u soit triangulaire supérieure (par blocs) avec tous les termes surdiagonaux de module inférieur à ε, on pose pour $x = (x_i)_i$ et $y = (y_i)_i$:

$$\langle x, y\rangle = \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{d} \overline{x_i} y_i.$$

De sorte que :

$$\langle u(x), x\rangle = \operatorname{Re}\sum_{i=1}^{d} a_{i,i}|x_i|^2 + \operatorname{Re}\sum_{i<j} a_{i,j}\overline{x_j}x_i.$$

Notons que :

$$\left|\sum_{i<j} a_{i,j}\overline{x_j}x_i\right| \leq \varepsilon\sum_{i,j}|x_i||x_j| = \varepsilon\left(\sum_i |x_i|^2\right)^2 \leq \varepsilon d\|x\|^2.$$

- Si $x \in E_1$, soit $\rho > 0$ tel que toutes les valeurs propres de A soit de partie réelle $> \rho$. On a
$$\langle u(x), x\rangle \geq \rho\|x\|^2 - d\varepsilon\|x\|^2.$$
- Si $x \in E_2$ alors
$$\langle u(x), x\rangle \leq d\varepsilon\|x\|^2.$$

D'où le résultat avec $\alpha = \dfrac{\rho}{3}$ et $\varepsilon = \dfrac{\rho}{3d}$. □

Deux critères de stabilité et d'instabilité

Théorème (Lyapunov). *Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ localement lipschitzien dont $x_0 \in U \subset \Omega$ est un équilibre. On suppose qu'il existe une fonction $V : U \subset \Omega \to \mathbf{R}$ C^1, dite de Lyapunov, telle que :*

(i) $V(x_0) = 0$

(ii) $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$, $V(x) > 0$

(iii) $\forall x \in U, \quad dV(x)f(x) \leq 0.$

Alors x_0 est un équilibre stable et si de plus $dV(x)f(x) < 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$ alors x_0 est asymptotiquement stable.

Preuve. On note $B_\varepsilon(x_0)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon ε et $S_\varepsilon(x_0)$ la sphère correspondante.

1. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}_\varepsilon \subset U$. Puisque V ne s'annule pas sur le compact $S_\varepsilon(x_0)$, il existe $m > 0$ tel que $V(x) \geq m$ pour tout $x \in S_\varepsilon(x_0)$. En outre, par continuité de V, il existe $0 < \delta < \varepsilon$ tel que $V(x) \leq m/2$ pour tout $x \in \overline{B}_\delta(x_0)$. Soit $x \in B_\delta(x_0)$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto V(\phi_t(x))$, on a $V(\phi_t(x)) < m$ pour tout temps où la solution $\phi_t(x)$ est définie. Par continuité des trajectoires, $\phi_t(x)$ ne peut pas traverser $S_\varepsilon(x_0)$ donc pour tout t où la solution est définie, $\phi_t(x_0) \in B_\varepsilon(x_0)$. Par le théorème de sortie de tout compact, la solution est définie pour tout $t > 0$ et reste dans $B_\varepsilon(x_0)$.
2. Si la fonction de Lyapunov est stricte, soit $x \in B_\delta(x_0)$. Par compacité de $\overline{B}_\varepsilon(x_0)$, ou bien $\phi_t(x) \to x_0$ lorsque $t \to +\infty$, ou bien il existe une sous-suite croissante $(t_k)_k$ telle que $\phi_{t_k}(x) \to x_*$ avec $x_* \neq x_0$. Si x_0 n'est pas asymptotiquement stable, on est dans la deuxième situation pour au moins un point $x \in B_\delta(x_0)$. Par continuité et stricte décroissance sur les orbites de V, on a déjà $V(\phi_{t_k}(x)) \to V(x_*)$ et $V(\phi_{t_k}(x)) > V(x_*)$. De plus, toujours par stricte décroissance de V sur les orbites :

$$\lim_{k \to +\infty} V(\phi_{1+t_k}(x)) = \lim_{k \to +\infty} V(\phi_1(\phi_{t_k}(x))) = V(\phi_1(x_*)) < V(x_*).$$

   Soient ℓ tel que $V(\phi_{1+t_\ell}(x)) < V(x_*)$ et $j > \ell$ tel que $t_j > 1 + t_\ell$. On a :

$$V(\phi_{t_j}(x)) < V(\phi_{1+t_\ell}(x)) < V(x_*).$$

   C'est une contradiction.

□

Théorème (Cetaev). *Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ localement lipschitzien dont x_0 est un équilibre. On suppose qu'il existe un ouvert $U \subset \Omega$ et une fonction $V : \Omega \to \mathbf{R}$ C^1 telle que :*

(i) $\forall x \in U$, $V(x) > 0$

(ii) $\forall x \in U$, $dV(x)f(x) > 0$

(iii) $\forall x \in \partial U$, $V(x) = 0$

(iv) $x_0 \in \partial U$

Alors l'équilibre x_0 est instable.

Preuve. On peut supposer que $x_0 = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $B := B(0, \varepsilon) \subset \Omega$. Grâce à (iv), on peut choisir $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ et $x \in U$ de norme majorée par ε'.

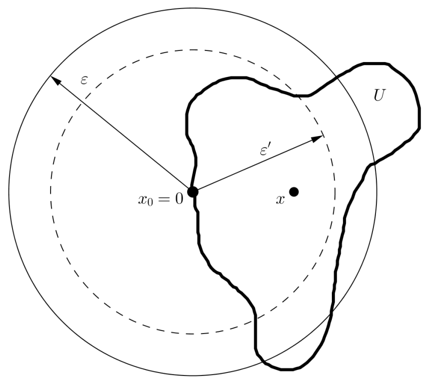

Figure 1: Un dessin

Supposons par l'absurde que $\phi_t(x)$ soit définie pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, à valeurs dans B. On définit :

$$g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}, \ \ t \mapsto V(\phi_t(x))$$

qui est une fonction C^1 sur $\mathbf{R}_+$ avec :

$$g'(t) = dV(\phi_t(x))f(\phi_t(x)).$$

Il est pas trop difficile de voir que $\phi_t(x) \in U$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$. On considère le compact :

$$K = \{y \in \overline{U} \cap B, \ V(y) \geq V(x)\}.$$

Par croissance de g, $\phi_t(x) \in K$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$. De plus $K \subset U$ donc il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall y \in K, \ \ dV(y)f(y) \geq \alpha$$

de sorte que $g'(t) \geq \alpha$ pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et $g(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est absurde puisque V est bornée sur K. $\square$

Deux théorèmes de stabilité et d'instabilité en première approximation

Théorème (Stabilité)**.** *Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ de vecteur C^1 tel que x_0 soit un équilibre et dont la matrice $df(0)$ a toutes ses valeurs propre de partie réelle strictement négative. Alors x_0 est un équilibre asymptotiquement stable.*

Preuve. On suppose que $x_0 = 0$. Par le lemme précédent, il existe $\alpha > 0$, un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et sa norme associée $\| \cdot \|$ tels que :

$$\forall h \in \mathbf{R}^d, \ \ \langle df(0)h, h \rangle \leq -\alpha \|h\|^2.$$

Soit $r > 0$ tel que $B := B(0, r) \subset \Omega$ (boule ouverte pour $\| \cdot \|$) et

$$\forall x \in B, \ \ \|f(x) - df(0)x\| \leq \frac{\alpha}{2}\|x\|.$$

La fonction $V|_B : x \mapsto \|x\|^2$ est une fonction de Lyapunov pour $f|_B$ puisque pour tout $x \in B$:

$$dV(x)f(x) = 2\langle x, f(x)\rangle = 2\Big(\langle x, df(0)x\rangle + \langle x, f(x) - df(0)x\rangle\Big) \leq 2\left(-\alpha\|x\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2\right) = -\alpha\|x\|^2.$$

Le théorème de Lyapunov permet de conclure. □

Théorème (Instabilité). *Soit $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ un champ de vecteur C^1 tel que x_0 soit un équilibre et dont la matrice $df(0)$ a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive. Alors x_0 est un équilibre instable.*

Preuve. On suppose que $x_0 = 0$. Soient E_1, E_2, $\alpha > 0$ et un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ comme dans le lemme préliminaire. Pour $v = v_1 + v_2 \in E_1 \oplus E_2$, on pose $V(v) = \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2$ et on va tenter d'appliquer théorème de Cetaev.

On pose $U_1 = \{x \in \mathbf{R}^d,\ V(x) > 0\}$ et on note :

$$A = df(0), \quad f(x) = Ax + g(x) \ \text{ où } \ g(x) = o(\|x\|).$$

Pour $x = x_1 + x_2 \in U_1$ et $h = h_1 + h_2$, on a :

$$dV(x)f(x) = 2\Big(\langle x_1, Ax_1\rangle - \langle x_2, Ax_2\rangle + \langle x_1 - x_2, g(x)\rangle\Big).$$

Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour $\|x\| \leq \varepsilon$:

$$\|g(x)\| \leq \frac{\alpha}{4}\|x\|.$$

Comme $\|x_1 - x_2\| = \|x\|$, on a $|\langle x_1 - x_2, g(x)\rangle| \leq \alpha\|x\|^2/4 \leq \alpha\|x_1\|^2/2$ et

$$dV(x)f(x) \geq 2\alpha(2\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2) + 2\langle x_1 - x_2, g(x)\rangle \geq \alpha\|x_1\|^2 > 0.$$

D'où le résultat en appliquant le théorème de Cetaev sur l'ouvert $U_1 \cap B(0, \varepsilon)$. □

Si on ne veut pas parler du résultat d'instabilité, on peut écrire une preuve plus simple du lemme préliminaire (cas où les valeurs propres sont toutes de parties réelles strictement positives), laquelle se trouve dans *Analyse fonctionnelle* de S.Gonnord et N. Tosel ou bien chez Grégoire Clarté.

Références.

S. Gonnord, N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : calcul différentiel*
C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications, 2nd Edition.*

220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
221 Équations différentielles linéaires. Système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.