Un exemple de perturbation d'un système linéaire : le pendule de Van der Pol.

Pour $\varepsilon > 0$, l'équation du pendule de van der Pol est :

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

que l'on s'empresse d'écrire comme un système du premier ordre :

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -y \\ y' & = & x - \varepsilon(x^2-1)y \end{array} \tag{VdP}$$

On le notera plus volontiers :

$$X' = AX + \varepsilon f(X) = F_\varepsilon(X), \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ (x^2-1)y \end{pmatrix}.$$

C'est une perturbation de l'équation $x'' + x = 0$ dont la solution $t \mapsto x(t)$ est 2π-périodique et de la forme :

$$t \mapsto x_0 \cos t + \dot{x_0} \sin t.$$

On va s'intéresser aux solution périodique du système perturbé (VdP).

Proposition. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute condition initiale $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, le système non-linéaire* (VdP) *possède une unique solution qui est globale.*

Preuve. Le champ de vecteur est C^1 donc il existe une unique solution maximale, définie sur un intervalle ouvert, on la note $X(t) = (x(t), y(t))$. On définit :

$$E(t) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$$

Comme

$$E'(t) = -\varepsilon(x^2-1)y^2$$

on peut séparer l'étude en deux cas : d'abord si $|x(t)| \leq 1$ alors $y(t)$ est bornée par le lemme de Gronwall et si $|x(t)| > 1$ alors $E' < 0$ donc E est décroissante et $\|X(t)\|_2$ est bornée. Dans les deux cas, le critère d'explosion en temps fini permet d'affirmer que la solution est globale. □

À partir de maintenant on fixe $\xi > 0$. On notera[1] $\phi_t(\xi; \varepsilon)$ le flot de (VdP) associé à la condition initiale

$$x(0;\varepsilon) := \xi \quad \text{et} \quad y(0;\varepsilon) = 0.$$

Proposition (Poincaré)**.** *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une fonction C^1, $(\xi, \varepsilon) \mapsto T(\xi, \varepsilon)$ telle que*

$$\phi_{T(\xi,\varepsilon)}(\xi;\varepsilon) \in \mathbf{R}_+ \times \{0\}, \quad T(\xi;0) = 2\pi \quad \text{et} \quad \phi_{T(\xi;0)}(\xi;0) = (\xi, 0).$$

On définit alors la fonction

$$(\xi, \varepsilon) \mapsto P(\xi, \varepsilon) := x(T(\xi,\varepsilon);\varepsilon).$$

1. Noter la subtile utilisation du point-virgule.

Preuve. Soit $\xi > 0$. On va appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction :

$$(t, \varepsilon) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+^* \mapsto g(t, \xi, \varepsilon) = (\phi_t(\xi; \varepsilon) - (\xi, 0)) \cdot F_\varepsilon(\xi, 0).$$

En effet, $\phi_t(\xi; \varepsilon) \in \mathbf{R}_+ \times \{0\}$ si et seulement si $\phi_t(\xi; \varepsilon) - (\xi, 0)$ est orthogonal à $F_\varepsilon(\xi, 0)$.

Puisque la solution du système non-perturbé est 2π-périodique :

$$g(2\pi, \xi, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial t}(t, \xi, \varepsilon) = F_\varepsilon(\xi, 0) \cdot F_\varepsilon(\xi, 0).$$

De sorte que $\dfrac{\partial g}{\partial t}(2\pi, \xi, 0) = \|F_0(\xi, 0)\|^2 > 0$.

$\square$

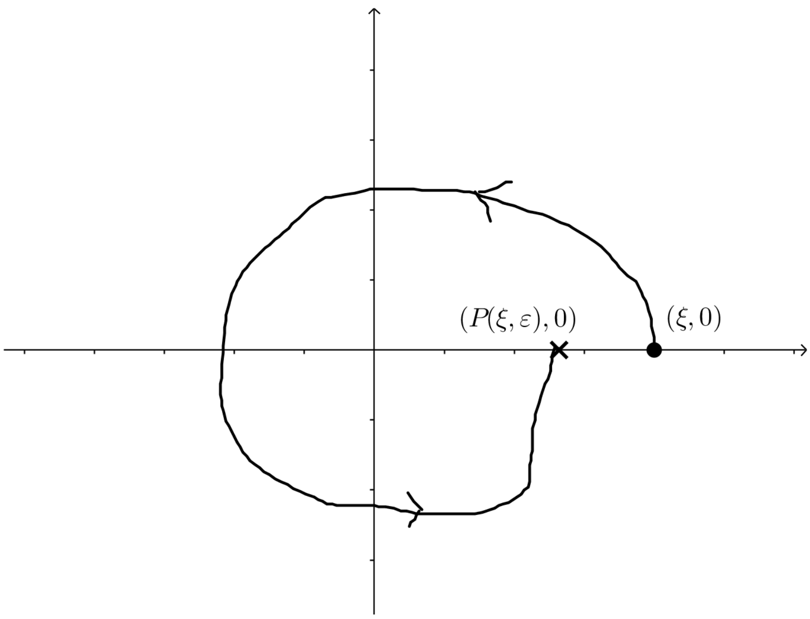

Figure 1: Cicéron c'est Poincaré

S'intéresser aux solutions périodiques revient à étudier les points fixes de $\xi \mapsto P(\xi, \varepsilon)$, c'est à dire aux zéros de la fonction

$$\delta(\xi, \varepsilon) := P(\xi, \varepsilon) - \xi \quad \text{qui vérifie} \quad \delta(\xi, 0) = 0 \ \text{pour tout} \ \xi > 0.$$

Plus précisément, on cherche une courbe $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ telle que

$$\delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0 \quad \text{pour } \varepsilon > 0 \text{ suffisamment petit.}$$

On ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites à δ mais comme :

$$\delta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon \partial_\varepsilon \delta(\xi, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

on peut poser

$$\Delta(\xi, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \delta(\xi, \varepsilon)$$

qui se prolonge par continuité en $\varepsilon = 0$ et qui vérifie :

$$\Delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0 \iff \delta(\beta(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0.$$

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites à Δ, il faut trouver $\xi > 0$ tel que :

$$\Delta(\xi, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\xi \Delta(\xi, 0) \neq 0 \quad \text{i.e} \quad \partial^2_{\xi\varepsilon} \delta(\xi, 0) \neq 0.$$

On calcule avec la définition de δ :

$$\partial_\varepsilon \delta(\xi, 0) = x'(T(\xi, 0), 0)\partial_\varepsilon T(\xi, 0) + \partial_\varepsilon x(T(\xi, 0), \varepsilon).$$

Or, $T(\xi, 0) = 2\pi$ et $x'(T(\xi, 0), 0) = -y(0, 0) = 0$. Il n'y a donc que le second terme à calculer. Pour ce faire, on dérive par rapport à ε le système (VdP) et on trouve (lemme de Schwarz) :

$$\begin{array}{rcl} (\partial_\varepsilon x)'(t; 0) & = & \partial_\varepsilon y(t; 0) \\ (\partial_\varepsilon y)'(t; 0) & = & \partial_\varepsilon x(t; 0) - (x^2(t; 0) - 1)y(t; 0) \end{array}$$

avec les conditions initiales :

$$\partial_\varepsilon x(0; 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\varepsilon y(0; 0) = 0.$$

C'est un système linéaire inhomogène que l'on résout par variation de la constante :

$$\begin{pmatrix} \partial_\varepsilon x(t; 0) \\ \partial_\varepsilon y(t; 0) \end{pmatrix} = \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix} 0 \\ (1 - x(s; 0)^2)y(s; 0) \end{pmatrix} ds.$$

En particulier, comme on sait résoudre explicitement le système non perturbé, un calcul avec des sinus et des cosinus montre que :

$$\partial_\varepsilon x(2\pi, 0) = \partial_\varepsilon \delta(\xi, 0) = \Delta(\xi, 0) = \int_0^{2\pi} \sin s[(1 - \xi^2 \cos^2 s)\xi \sin s] ds = \frac{\pi}{4}\xi(4 - \xi^2).$$

En conclusion $\xi = 2$ est le seul zéro de $\Delta(\xi, 0)$ et il est simple. Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction $\varepsilon \mapsto \beta(\varepsilon)$ définie dans un voisinage de $\varepsilon = 0$ telle que $\beta(0) = 2$ et pour tout $\varepsilon > 0$ dans le domaine de définition de β, le système (VdP) a une orbite périodique avec condition initiale $(x(0; \varepsilon), y(0; \varepsilon)) = (\beta(\varepsilon), 0)$.

Il parait que l'on peut aussi calculer un développement asymptotique quand $\varepsilon \to 0$ de la période des orbites périodiques du système (VdP) en développant en série de Taylor :

$$\varepsilon \mapsto T(\beta(\varepsilon), \varepsilon).$$

à partir de l'identité :

$$y(T(\beta(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) \equiv 0.$$

La suite consisterait à montrer que l'unique trajectoire périodique est un cycle limite pour les autres trajectoires, ce qui résulte directement du théorème de Poincaré-Bendixson (difficile, il y a une preuve dans le Gonnord-Tosel). En voici une illustration :

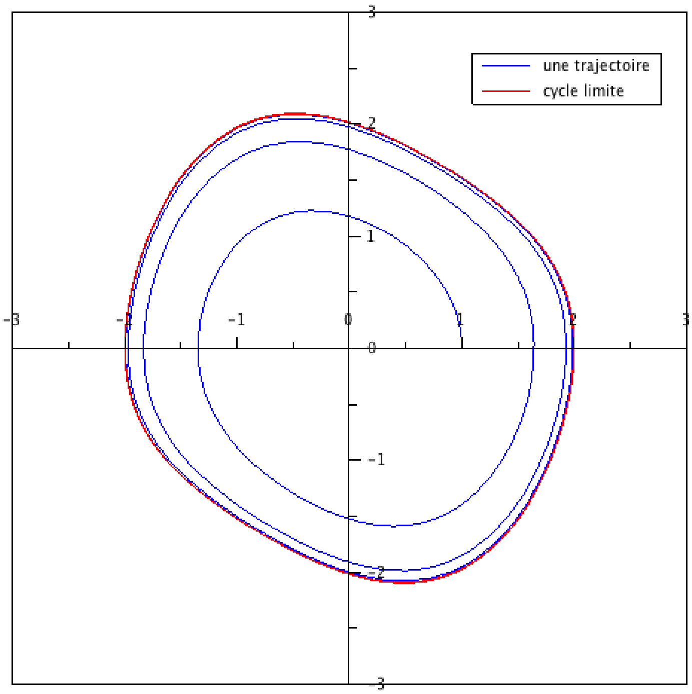

Figure 2: Existence d'un cycle limite pour le pendule de Van Der Pol

Réalisé sous l'oeil sévère de Grégoire Clarté.

Référence. C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications, 2nd Edition.*

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
220 Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
221 Équations différentielles linéaires. Système d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.