UNE FAÇON DE PROLONGER LA FONCTION ζ.

Quelques pré-requis.

La fonction thêta définie pour $t > 0$ par $\theta(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

C'est une conséquence immédiate de la formule de Poisson :

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)$$

avec la bonne convention pour la transformée de Fourier, de telle sorte que :

$$\mathcal{F}\left(e^{-\alpha|\cdot|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2}.$$

La fonction $\tilde{\theta}(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t}$ vérifie alors l'équation fonctionnelle :

$$\tilde{\theta}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\left(2\tilde{\theta}\left(\frac{1}{t}\right) + 1\right) - \frac{1}{2}. \tag{1}$$

La fonction Γ vérifie :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \tag{2}$$

expression à partir de laquelle on voit que $1/\Gamma$ se prolonge en une fonction entière (et même $1/z\Gamma$).

Ce qu'on va montrer.

Théorème. *La fonction ζ définie sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > 1$ par :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}\setminus\{1\}$ et vérifie l'identité :

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right). \tag{3}$$

PREUVE. Il s'agit essentiellement de montrer que ζ satisfait l'équation fonctionnelle annoncée. Montrons la d'abord pour $\operatorname{Re} s > 1$.

Étape 1. Au commencement, une astuce.

Grâce à l'astucieux changement de variable $x = \pi n^2 y$, on va relier Γ et ζ :

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\frac{s}{2}}\frac{dx}{x} = \pi^{s/2}n^s\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{s/2}\frac{dy}{y}$$

de sorte, qu'au moins formellement,

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{s/2}\frac{dy}{y}.$$

Bien sûr, on s'empresse d'intervertir la somme et l'intégrale, puisque

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|e^{-\pi n^2 y}y^{s/2}|\frac{dy}{y}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 y}y^{\mathrm{Re}\, s/2}\frac{dy}{y}=\pi^{\mathrm{Re}\, s/2}\zeta(\mathrm{Re}\, s)\Gamma(\mathrm{Re}\, s/2)<+\infty.$$

On trouve :

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\tilde\theta(y)y^{s/2}\frac{dy}{y}.$$

Étape 2. Un peu de calcul.

En utilisant (1), on va d'abord écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1\tilde\theta(y)y^{s/2}\frac{dy}{y} &= \int_0^1\tilde\theta\left(\frac{1}{y}\right)y^{(s-1)/2}\frac{dy}{y}+\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}dy-\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}dy\\ &= \int_1^{+\infty}\tilde\theta(y)y^{-(s-1)/2}\frac{dy}{y}-\frac{1}{s(1-s)}.\end{aligned}$$

Et finalement,

$$\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\int_1^{+\infty}(y^{\frac{s}{2}}+y^{\frac{1-s}{2}})\tilde\theta(y)\frac{dy}{y}-\frac{1}{s(1-s)}.$$

Étape 3. Reste à vérifier que tout va bien.

Le terme de droite est clairement invariant par $s\mapsto 1-s$, ce qui montre (3) pour $\mathrm{Re}\, s>1$. Il faut maintenant s'attarder sur des questions de régularité :

(i) On peut sans mal diviser par $\Gamma(s/2)$, on regarde d'abord :

$$\frac{1}{\Gamma(s/2)}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right).$$

Il y a un pôle en $s=1$ mais la singularité en $s=0$ est effaçable, comme le montre (2).

(ii) On va montrer que l'intégrale définit une fonction holomorphe sur tout $\mathbf{C}$ et diviser par $\Gamma(s/2)$ ne changera rien. Comme l'intégrande est clairement holomorphe sur $\mathbf{C}$ pour (presque) tout $y\in(1,+\infty)$, on peut appliquer le théorème d'holomorphie sous l'intégrale car :

$$\left|(y^{\frac{s}{2}}+y^{\frac{1-s}{2}})\tilde\theta(y)\frac{1}{y}\right|\leq\left(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n y}\right)(y^{\frac{\mathrm{Re}\, s}{2}}+y^{\frac{1-\mathrm{Re}\, s}{2}})\frac{1}{y}\leq\frac{y^{\frac{b}{2}}+y^{\frac{1-a}{2}}}{y(e^{\pi n y}-1)}\in L^1_y\big((1,+\infty)\big)$$

si $a<\mathrm{Re}\, s<b$.

En conclusion, la formule :

$$\zeta(s)=\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)}\int_1^{+\infty}(y^{\frac{s}{2}}+y^{\frac{1-s}{2}})\tilde\theta(y)\frac{dy}{y}-\frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2)s(1-s)}$$

définit bien une fonction holomorphe dans $\mathbf{C}\setminus\{1\}$. □

Remarques complémentaires.

1. L'équation (2) s'obtient en fait assez facilement, il suffit d'écrire, par convergence dominée :
$$\Gamma(z) = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \left(1 - \frac{t}{N}\right)^N t^{z-1}dt$$
et d'intégrer N fois par parties pour obtenir :
$$\Gamma(z) = \lim_{N\to+\infty} \frac{N!N^z}{z(z+1)\dots(z+N)}.$$
En inversant cette relation on trouve :
$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{N\to+\infty} N^{-z} \prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{z}{n}\right).$$
Ensuite, on remarque que :
$$N^{-z} = e^{-z\log N} = e^{z(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{N}-\log N)} \prod_{n=1}^{N} e^{-\frac{z}{n}}$$
ce qui fait apparaitre la constante γ.
2. D'autres formulations de l'équation fonctionnelle (3) existent. La plupart s'obtiennent grâce à d'astucieuses formules vérfiées par Γ :
$$\Gamma(1+s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \quad \text{et} \quad \Gamma(s+1) = 2^s\Gamma(s/2+1)\Gamma(s/2+1/2)\pi^{-1/2}.$$
3. Enfin, la formule de Poisson pour une fonction continue f vérifiant :
$$\exists M > 0, \alpha > 1,\ \forall x \in \mathbf{R}, |f(x)| \leq M(1+|x|)^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$$
n'a rien à voir avec le sujet. Elle s'obtient en écrivant la décomposition en série de Fourier de la fonction 1-périodique :
$$g(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(x+n).$$

Références.

B. Candelpergher, *Calcul intégral*
C. Zuily, H. Queffélec, *Analyse pour l'agrégation*

207 Prolongement de fonctions. Exemples et applications.
235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.
239 Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
245 Fonctions holomorphes sur un ouvert de **C**. Exemples et applications.