153. POLYNOMES D'ENDOMORPHISME EN DIMENSION FINIE. RÉDUCTION D'UN ENDOMORPHISME EN DIMENSION FINIE. APPLICATIONS

Cadre : Un espace vectoriel E sur un corps K de dimension n finie. Lorsque la notation n'est pas précisée, $u \in \mathcal{L}(E)$

I/ Polynômes d'endomorphismes

1) Algèbre $K[u]$.

déf + prop 1 L'application $\varphi_u : \begin{cases} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$

est un morphisme d'algèbre. Son image est notée $K[u]$: c'est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$. Son noyau, noté I_u, est l'idéal annulateur de u

Th 2 Théorème de décomposition des noyaux :
Soit $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ où les P_i sont deux à deux premiers entre eux. Alors $\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_i(u))$

2) Polynôme minimal.

prop 3 . Comme $\dim(E) < \infty$, φ_u n'est pas injectif donc $I_u \neq \{0\}$

prop + déf 4 Comme $K[X]$ est principal, il existe un unique polynôme unitaire qui engendre I_u. On le note π_u et on le nomme "polynôme minimal de u"

prop 5 $K[u] \simeq \dfrac{K[X]}{(\pi_u)}$ est de dimension $\deg(\pi_u)$

$(id_E, u, \dots u^{\deg(\pi_u)-1})$ en est une base.

prop 6 $\lambda \in K$ est une valeur propre de u ssi $\pi_u(\lambda) = 0$

prop 7 . Si F est un sous espace vectoriel u-stable alors $\pi_{u|_F} \mid \pi_u$

3) Polynôme caractéristique

déf 8 Le polynôme caractéristique de u, noté χ_u, est par définition le polynôme $\det(u - X\, id_E)$

ex 9 Le polynôme caractéristique de l'application nulle est $(-X)^n$ et son polynôme minimal est X

prop 10 Le coefficient dominant de χ_u est $(-1)^n$ et $\deg(\chi_u) = n$

prop 11 Dans le cas de la dimension 2,
$\chi_u = X^2 - \mathrm{tr}(u) X + \det(u)$

ex 12 Le polynôme caractéristique de $u : (x,y) \mapsto (x+2y, -x+y)$ est $X^2 - 2X + 3$

prop 13 $\lambda \in K$ est valeur propre de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$

th 14 Cayley Hamilton : $\pi_u \mid \chi_u$

prop 15 : Si F est u-stable, $\chi_{u|_F} \mid \chi_u$

4) Utilité des polynômes annulateurs

rq 16 : Ce qui suit vaut en particulier pour π_u et χ_u

① Calcul de l'inverse de u : Si $P \in I_u$ et $a_0 \neq 0$
$P = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$

alors $P(u) = \sum_{i=0}^{m} a_i u^i = 0$

Donc $u \circ \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u^{i-1} \right) = -a_0$ càd $u^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u^{i-1}\right)$

② Calcul de puissances de u : Si on a $P \in I_u$ et $Q \in K[X]$ et qu'on veut calculer $Q(u)$, la division euclidienne de Q par P donne $Q = PA + R$ où $\deg(R) < \deg(P)$ et $Q(u) = R(u)$ donc on se ramène au calcul de puissances de u inférieures à $\deg(P)$

II/ Un outil pour la réduction

1) Diagonalisabilité

th 17 u est diagonalisable ssi π_u est scindé à racines simples

ssi $\exists P \in I_u \setminus \{0\}$ scindé à racines simples

ssi χ_u est scindé et $\forall \lambda$ valeur propre de u,

$\dim(\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)) =$ multiplicité de λ dans χ_u

ex 18 Un projecteur non trivial est toujours diagonalisable car son polynôme minimal est $X(X-1)$

rq 19 Par la prop 7, si F est u-stable et u est diagonalisable alors $u|_F$ aussi

prop 20 Si u et v commutent et sont diagonalisables alors elles sont diagonalisables dans une même base

appli 21 Diagonaliser un endomorphisme / matrice permet de facilement calculer ses puissances

2) Trigonalisabilité

th 18 u est trigonalisable ssi χ_u est scindé

ssi π_u est scindé

ssi $\exists P \in I_u \setminus \{0\}$ scindé

csqc 19 : Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

prop 20 Par la prop 15, si F est u stable et u est trigonalisable alors $u|_F$ aussi prop 21 Si u et v commutent et sont trigonalisables alors ils sont trigonalisables dans une même base.

3) Réductions particulières

Th 22 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u est scindé. Alors il existe un unique couple (d,n) d'endomorphismes tels que : $\begin{cases} d \text{ est diagonalisable, } n \text{ est nilpotent} \\ d \text{ et } n \text{ sont des polynômes en } u \\ u = d+n \end{cases}$

DEV 1

appli 23 Si (d,n) est la décomposition de Dunford de u, $e^u = e^d e^n$.

déf 24 Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est normal ssi $uu^* = u^* u$.

Th 25 Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme normal de E. Alors il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$ où les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et les τ_j sont de la forme $\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ pour $a_j, b_j \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

DEV 2

appli 26 : Une matrice symétique / Un endomorphisme autoadjoint est diagonalisable en base orthonormée