Banach-Steinhaus [Gourdon analyse p404-405]

Th E = Banach ; F = evn ; $H \subset \mathcal{L}_c(E,F)$ muni de $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$

Alors $(\|f\|)_{f \in H}$ est borné

ou $\exists x \in E$ tq $\sup_{f \in H} \|f(x)\|_F = +\infty$ (et en fait les x comme ça sont denses de E)

rq en particulier, si $\forall x \in E$, $\sup_{f \in H} \|f(x)\| < \infty$ alors $\sup_f \|f\| < \infty$

démo • On rappelle le th de Baire : Soit (E,d) espace métrique complet et $(\Omega_n)_{n \geq 0}$ une suite d'ouverts denses de E. Alors $\bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ est dense de E

• Soit $k \in \mathbb{N}$ on déf $\Omega_k = \{x \in E \mid \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k\}$. Alors Ω_k est ouvert car

si $x \in \Omega_k$, $\sup_{f \in H} \|f(x)\| > k$ donc $\exists f_0 \in H$ tq $\|f_0(x)\| > k$ et par continuité de f_0,

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall y \in B(x,\varepsilon)$, $\|f_0(y)\| > k$. Donc $\forall y \in B(x,\varepsilon)$, $\sup_{f \in H} \|f(y)\| \geq \|f_0(y)\| > k$

Donc $B(x,\varepsilon) \subset \Omega_k$.

• On a alors 2 cas :

→ Si $\forall k \in \mathbb{N}$, Ω_k est dense dans E (qui est complet), le th de Baire donne

$\overline{\bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega_k} = E$ et en particulier $\bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega_k \neq \emptyset$ donc $\exists x \in \bigcap_{k \geq 0} \Omega_k$ $(\subset E)$

et ce x vérifie $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sup_{f \in H} \|f(x)\| > k$

donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sup_f \|f(x)\| > k$ donc $\sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$

→ Sinon $\exists k \in \mathbb{N}$ tq Ω_k est pas dense de E donc $\exists x_0 \in E$ et $\rho > 0$ tq

$B(x_0,\rho) \cap \Omega_k = \emptyset$. Quitte à diminuer ρ, on peut m̂ supposer $\overline{B(x_0,\rho)} \cap \Omega_k = \emptyset$

Donc $\forall x \in \overline{B(x_0,\rho)}$, $\|f(x)\| \leq k$ pour $\forall f \in H$

Donc $\forall x \in \overline{B(0,\rho)}$, $\forall f \in H$, $\|f(x)\| \overset{\text{linéarité de } f}{=} \|f(x+x_0) - f(x_0)\| \leq 2k$

On en déduit que $\forall x \in E$, $\|x\| = 1 \Rightarrow \forall f \in H$, $\|f(x)\| \leq \dfrac{2k}{\rho}$

donc que $\forall f \in H$, $\|f\| \leq \dfrac{2k}{\rho}$ donc $(\|f\|)_{f \in H}$ est borné.

appli 1 : E = Banach ; F = evn ; $(f_n)_n \in \mathcal{L}_c(E,F)$ cvs vers f. Alors $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$

démo : On prend $H = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Soit $x \in E$

On a $(\|f_n(x)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle cv /hp. Dc $\forall x \in E$, $\sup_{g \in H} \|g(x)\| < \infty$

ce qui assure par BS que $(\|g\|)_{g \in H}$ est borné. Dc $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| \leq M$ càd

$\forall x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n(x)\| \leq M\|x\|$ ... donc que f est C^0

(appli 2) $\exists$ des fonctions $\neq$ de leur série de Fourier

On munit $C_{2\pi} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \ C^0$ et 2π périodique $\}$ de la norme ∞

$\forall f \in C_{2\pi}, \forall p \in \mathbb{Z}$, on note $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ipt}$ et $S_p(f) : x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=-p}^{p} c_k(f)\, e^{-ikx}$

Alors $\exists f \in C_{2\pi}$ tq $(S_n(f)(0))_{n \geq 0}$ diverge.

En particulier, cette f est $\neq$ de sa série de Fourier.

<u>démo</u> • $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\ell_n : \left\{ \begin{array}{l} C_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \longmapsto S_n(f)(0) \end{array} \right.$: elle est bien déf, linéaire (par linéarité de $\int$) et C^0 car :

$$\forall f \in C_{2\pi}, \ |\ell_n(f)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt}}_{= D_n(t) \ = \ \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin(t/2)}} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_\infty \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt}_{= \text{cste}} .$$

• Calculons $\|\ell_n\|$. On a par $\uparrow$, $\|\ell_n\| \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $f_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \dfrac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon} \end{array} \right. \in C_{2\pi}$ (car c'est le cas de D_n). On a $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $D_n(t) f_\varepsilon(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} |D_n(t)|$ et $\forall \varepsilon > 0$, $|D_n(t) f_\varepsilon(t)| \leq |D_n(t)|$ qui est $\int_{-\pi}^{\pi}$

On en déduit par cv dominée que $\ell_n(f_\varepsilon) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(t) D_n(t) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt$

Donc $\|\ell_n\| = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, dt = C$ car $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \underset{\downarrow \varepsilon \to 0}{\|\ell_n(f_\varepsilon)\|} \leq \dfrac{\|\ell_n(f_\varepsilon)\|}{\|f_\varepsilon\|} \leq C$

donc $\dfrac{\|\ell_n(f_\varepsilon)\|}{\|f_\varepsilon\|} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} C$

• $(C_{2\pi}, \| \ \|_\infty)$ est complet (car fermé de $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\| \ \|_\infty$ qui l'est) ; $(\mathbb{R}, | \ |)$ = evn

et $\{\ell_n / n \in \mathbb{N}\}$ est $\subset \mathcal{L}_c(C_{2\pi}, \mathbb{R})$

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq \left|\frac{t}{2}\right|$ donc $\|\ell_n\| \geq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left| \dfrac{\sin\left((2n+1) t/2\right)}{t/2} \right| dt$

$$= \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty} \qquad u = \frac{(2n+1)t}{2} + \text{parité}$$

rq : faire 1 pt $(\|\ell_n\|)_n$ pas borné puis 1 pt ccl avec BS

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du = +\infty$ $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin(u)}{u} \right| du$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin(u)|}{k\pi} du$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \qquad \text{car } \int_0^{\pi} \sin(u) = 2$$

Donc $\|\ell_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et donc Banach Steinhaus

assure : $\exists f \in C_{2\pi}$ tq $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \ell_n(f) = +\infty$

càd $\exists f \in C_{2\pi}$ tq $S_n(f)(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

et OK