Nb de Bell [X ENS alg 1 p 14]

(Th) Soit $n \geq 0$. On note B_n le nb de partitions $\neq$ de $[\![1,n]\!]$ (rq : $B_0 = 1$ puisque la seule partition de $\emptyset$ est $\{\emptyset\}$) + ex $B_3 = 5$

Alors : 1) la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ a 1 rayon de cv $R > 0$ et sa somme f vérifie

$$\forall z \in]-R, R[, \quad f(z) = e^{(e^z - 1)}$$

2) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad B_k = \frac{1}{e}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}\right)$

démo. Soit $n \geq 0$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, on note E_k = nb de partitions de $[\![1, n+1]\!]$ tq le morceau contenant $(n+1)$ contienne aussi exactement k autres entiers que $n+1$

On a alors $\text{card}(E_k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{choix des } k \text{ élé qui vont avec } (n+1)} \underbrace{B_{n-k}}_{\longrightarrow \text{ nb de partitions des élé restants}}$.

On a donc, comme $\{E_0, \ldots, E_n\}$ est 1 partition de $\{$partitions de $[\![1, n+1]\!]\}$,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k \quad \text{par chgmt d'indice}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad \text{car } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

- Montrons à présent /rec sur $n \in \mathbb{N}$ H_n : " $B_n \leq n!$

Clair pour $n = 0$. Soit n tq H_n. Alors :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! \quad / HR$$

$$= n! \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}}_{\leq 1} \right) \leq n!(n+1) = (n+1)! \quad \text{D'où } H_{n+1}$$

- Ainsi, $\forall n \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, $\left| \frac{B_n}{n!} z^n \right| \leq |z|^n$ ce qui assure la cv de la série sur un disque de rayon R avec $R \geq 1$. En particulier $R > 0$.

Ce qui assure qu'on peut écrire $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$ (chgmt indice) $\forall z \in]-R, R[$

et qu'on peut dériver terme à terme cette série entière pour obtenir :

$$\forall z \in]-R, R[\quad f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{z^n}{n!} \quad \text{par } (*)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{B_k}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!} \right) z^n$$

On reconnait ici le produit de Cauchy de $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$ (de rayon ∞)

qui ont tous deux 1 rayon de cv $\geq R$ donc :

$\forall z \in]-R,R[, \quad f'(z) = f(z)e^z$ (car $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \ \forall z \in \mathbb{R}$)

On résout cette équation pour avoir : $\exists C$ cste tq $\forall z \in]-R,R[, \ f(z) = Ce^{(e^z)}$

Or, $f(0) = 1$ donc $C = \frac{1}{e}$.

On conclut donc que $\forall z \in]-R,R[, \ f(z) = \frac{1}{e} e^{e^z} = e^{(e^z - 1)}$

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On a alors $e^{(e^z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} \right) \frac{1}{n!}$

$\forall k,n \in \mathbb{N}$, notons $u_{n,k} = \frac{(nz)^k}{n!\,k!}$

On cherche à mq $(u_{n,k})_{n,k}$ est sommable.

Or, $\forall n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n|z|)^k}{n!\,k!} = \frac{e^{n|z|}}{n!}$ = TG d'une série cv (vers $e^{(e^{|z|})}$)

C'est donc bien le cas.

On en déduit qu'on peut sommer les $(u_{n,k})_{n,k}$ dans l'ordre qu'on veut (Fubini, cas particulier)

et donc $\forall z \in]-R,R[, \ f(z) = \frac{1}{e} e^{(e^z)}$

$$= \frac{1}{e} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!\,n!} \right)$$

$$= \frac{1}{e} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!\,n!} \right)$$

$$= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{z^k}{k!}$$

Par unicité du DSE de f sur $]-R,R[$, on en déduit que

$$\forall k \geq 0, \ B_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Rq : Ce qu'on vient de faire montre en fait que $R = +\infty$