Bernstein [Barbe - Ledoux = probas p 59] + Heine ?

(Lemme) Th de Heine : Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un compact $[a,b]$ y est uniformément continue

démo lemme

Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in [a,b]$. Comme f est C^0 en x, $\exists \delta_{x,\varepsilon} > 0$ tq $\forall y \in [a,b]$,

$$|x-y| < \delta_{x,\varepsilon} \overset{(*)}{\Rightarrow} |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Or, $[a,b] \subset \bigcup_{x \in [a,b]} B\left(x, \frac{\delta_{x,\varepsilon}}{2}\right)$ et comme $[a,b]$ est compact, on peut extraire de ce recouvrement 1 sous recouvrement $< \infty$:

$[a,b] \subset \bigcup_{i=0}^{n} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i,\varepsilon}}{2}\right)$. Notons alors $\delta = \min_{i=1}^{n} \frac{\delta_{x_i,\varepsilon}}{2}$ (bien déf car nb $< \infty$ de $\frac{\delta_{x_i,\varepsilon}}{2}$)

On a alors : soit $(x,y) \in [a,b]$ tq $|x-y| < \delta$

On sait $\exists i \in [\![1,n]\!]$ tq $x \in B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i,\varepsilon}}{2}\right)$ et d'autre part,

$$|x_i - y| \leq |x_i - x| + |x-y| < \frac{\delta_{x_i \varepsilon}}{2} + \min_{i=1}^{n} \frac{\delta_{x_i \varepsilon}}{2} < \delta_{x_i,\varepsilon}$$

On en déduit que $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(x_i)| + |f(x_i)-f(y)|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{par } (*)$$

On a donc mq $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x,y \in [a,b], |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

cad f est uniformément C^0 sur $[a,b]$

(rq) A 1 telle fonction f (uc), on peut associer $h > 0 \longrightarrow \omega(h) = \sup_{|u-v|<h} |f(u)-f(v)|$

le module de continuité uniforme de f. Il est bien défini car $\{|f(u)-f(v)| \text{ tq } |u-v| < h\}$ est majoré par uc.

De plus $\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$. En effet : soit $\varepsilon > 0$. /uc, $\exists \delta > 0$, $|u-v| < \delta \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$

Alors si $0 < h < \delta$, $|u-v| < h \Rightarrow |u-v| < \delta \Rightarrow |f(u)-f(v)| < \varepsilon$

donc $\sup_{|u-v|<h} |f(u)-f(v)| < \varepsilon$ cad $\omega(h) < \varepsilon$

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $0 < h < \delta \Rightarrow |\omega(h)| < \varepsilon$ ce qui conclut

(Th) Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$

le n^e polynôme de Bernstein (associé à f)

Alors $(B_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

démo • Soit $x \in [0,1]$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de va de Bernoulli indep et identiquement distribuées (iid) de paramètre x. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,x)$

(qui suit 1 loi binomiale de paramètres n et x)

On a alors $E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ par le terme de transfert

$\left(E[\varphi(X)] = \sum_{x \in Supp(X)} \varphi(x)\, \mathbb{P}(X=x) \right)$ ici $Supp(X) = [\![0,n]\!]$

Cette espérance $\exists$ car $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ est une va discrète sur 1 espace fini $\left(\left\{ f\left(\frac{i}{n}\right), i \in [\![0,n]\!] \right\}\right)$ donc est $\int$.

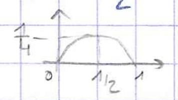
Donc $E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(x)$

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$ et $\delta \in]0,1[$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &= \left| E[f(x)] - E\left[f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right] \right| \quad \text{car } \omega \mapsto f(x) \text{ est 1 va cste} \\
&= \left| E\left[f(x) - f\left(\tfrac{S_n}{n}\right)\right] \right| \quad \text{par linéarité} \\
&\leq E\left[\left| f(x) - f\left(\tfrac{S_n}{n}\right) \right| \right] \\
&= E\Big[\underbrace{\left| f(x) - f\left(\tfrac{S_n}{n}\right) \right|}_{\leq \omega(\delta) \text{ / def}} \mathbb{1}_{|x - \frac{S_n}{n}| < \delta} \Big] + E\left[\left| f(x) - f\left(\tfrac{S_n}{n}\right) \right| \mathbb{1}_{|x - \frac{S_n}{n}| \geq \delta} \right] \\
&\leq \omega(\delta) \underbrace{\mathbb{P}\left(\left| x - \tfrac{S_n}{n} \right| < \delta \right)}_{\leq 1} + 2\|f\|_\infty \, \mathbb{P}\left(\left| x - \tfrac{S_n}{n} \right| \geq \delta \right)
\end{aligned}
$$

Or, par Tchebytchev, $\mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n}{n} - \underset{E\left[\frac{S_n}{n}\right] \text{ car } E[S_n] = nx}{\underset{\parallel}{x}} \right| \geq \delta \right) \leq \dfrac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2} = \dfrac{Var(S_n)}{n^2 \delta^2} = \dfrac{nx(1-x)}{n^2 \delta^2} \leq \dfrac{1}{4n\delta^2}$

car $x \mapsto x(1-x)$ est max en $\frac{1}{2}$ sur $[0,1]$



Donc $|f(x) - B_n(x)| \leq \omega(\delta) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta \in]0,1[, \ \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta) + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}$

puis $(n \to +\infty)$ que $\forall \delta \in]0,1[\quad \limsup_{n \to +\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega(\delta)$

puis $(\delta \to 0)$ que $0 \leq \limsup_{n \to +\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \|f - B_n\|_\infty = 0$

d'où la cvu annoncée

(cor) Th de Stone-Weierstrass : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue sur le compact $[0,1]$

Il existe 1 suite $(P_n)_n$ de polynômes qui cvu vers f sur $[0,1]$

démo $(B_n)_n$ convient

(rq) On peut remplacer $[0,1]$ par n'importe quel compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ en appliquant ce qui précède à $t \mapsto f\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$.