Cauchy Lipschitz global [Rouvière p 180]

**Th** Soit $m \geq 1$ ; $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^m$ ; $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tq $\overset{\circ}{I} \neq \emptyset$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ continue et global lip /r à sa 2e variable (cad $\forall K$ compact $\subset I$, $\exists k > 0$ tq $\forall t \in K$, $\forall y, z \in \mathbb{R}^m$, $\|f(t,y) - f(t,z)\| \leq k \|y - z\|$) et enfin $x \in \mathbb{R}^m$, $t_0 \in I$.

Alors le pb de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = x \end{cases}$ admet une ! solution qui est globale.

démo • On note $F : \begin{cases} E = C^0(I, \mathbb{R}^m) \longrightarrow \{\text{fonctions de } I \text{ ds } \mathbb{R}^m\} \\ y \longmapsto \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t \longmapsto x + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds \end{cases} \end{cases}$

Montrons que $y$ est solution de (C) $\Leftrightarrow$ $y$ est point fixe de $F$

Si $y$ est solution de (C), $y$ est dérivable sur $I$ et $y' = f(\cdot, y)$ donc $y \in C^1$ car $f \in C^0$

y est l'$\int$ de sa dérivée

On en déduit que $\forall t \in I$, $y(t) = \int_{t_0}^t y'(s)\, ds + y(t_0)$

$$= x + \int_{t_0}^t f(s, y(s))\, ds = F(y)(t)$$

Réciproquement, si $y$ est point fixe de $F$ alors $y$ est dérivable et vérifie (C)

• Traitons le cas où $I$ est compact.

On note $k$ la constante de Lipschitz associée à $I$ et $\ell = \sup(I) - \inf(I)$ le diamètre de $I$

On munit $E = C^0(I, \mathbb{R}^m)$ de $\| \ \|_k : y \mapsto \max_{t \in I} e^{-k|t - t_0|} \|y(t)\|$ (qui est une norme)

permet d'assurer que F est contractante

On a : $\forall y \in E$, $e^{-k\ell} \|y\|_\infty \leq \|y\|_k \leq \|y\|_\infty$ donc $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_k$ sont équivalentes sur $E$. Comme $(E, \| \ \|_\infty)$ est un Banach, $(E, \| \ \|_k)$ aussi

De plus, $\forall y \in E$, $F(y) \in C^0$ donc $F : E \to E$

Enfin, montrons que $F$ est contractante (pour $\| \ \|_k$) :

Soit $y, z \in E$. $\forall t \geq t_0$ on a

$$F(y)(t) - F(z)(t) = \int_{t_0}^t \left( f(s, y(s)) - f(s, z(s)) \right) ds \quad \text{donc}$$

$$e^{-k(t - t_0)} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|\, ds$$

$$\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t k \|y(s) - z(s)\|\, ds$$

$$= e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^t k\, e^{k(s-t_0)} \left( e^{-k(s-t_0)} \|y(s) - z(s)\| \right) ds$$

$$\leq e^{-k(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} k e^{k(s-t_0)} \|y-z\|_k \, ds$$
$$= e^{-k(t-t_0)} \|y-z\|_k \left( e^{k(t-t_0)} - 1 \right)$$
$$= \left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right) \|y-z\|_k$$

De m̂ si $t \leq t_0$ en remplaçant $e^{-k(t-t_0)}$ par $e^{-k(t_0-t)}$ et en faisant $\Delta$ aux bornes des $\int$ lors des majorations.

D'où : $\forall y, z \in E, \forall t \in I, \quad e^{-k|t-t_0|} \|F(y)(t) - F(z)(t)\| \leq (1 - e^{-k|t-t_0|}) \|y-z\|_k$
$$\leq (1 - e^{-k\ell}) \|y-z\|_k$$

En passant au max en $t$, $\|F(y) - F(z)\|_k \leq \underbrace{(1 - e^{-k\ell})}_{<1} \|y-z\|_k$

donc $F$ est bien contractante

/ Th du point fixe, on en déduit que $F$ admet $1!$ pt fixe ce qui conclut vu le $1^{er}$ pt

- Désormais $I$ est quelconque. Mais $\exists$ une suite $\nearrow$ de compacts $K_n$ tq $I = \bigcup_{n \geq 0} K_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, t_0 \in K_n$

Par ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!$ solution $y_n$ de $(C)$ sur $K_n$

Si $y$ est solution de $(C)$, par $!$, $y|_{K_n} = y_n \quad \forall n$ d'où l'$!$ de la solut° de $(C)$

D'autre part $y : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \longmapsto y_n(x) \end{cases}$ $\forall n$ tq $x \in K_n$ est bien déf (toujours par $!$ sur les $K_n$)

et donne une solution de $(C)$ globale (exhaustivité des $K_n$)