

## complétude de la résolution au 1<sup>er</sup> ordre [Laraigne - Rougemont p 102]

(Th) Soit  $E$  un ensemble de clauses. Si  $E$  n'admet pas de modèle alors  $\exists$  une réfutation de  $E$  au 1<sup>er</sup> ordre

(Lq) Complétude d'un R.T pour un  $\Sigma$  de déduction  $\vdash =$   
si  $\varphi$  est une sémantique de  $T$  ( $= T \models \varphi =$  H modèle de  $T$  est modèle de  $\varphi$ ) alors  $T \vdash \varphi$ .  
Et si  $T \not\models \varphi$ ,  $T \cup \{\neg \varphi\}$  a pas de modèle donc  $T \cup \{\neg \varphi\} \vdash \perp$  et cela veut dire  
(on le pose comme def) que  $T \vdash \varphi$ : on montre bien la complétude

Lemme 1 Un ensemble  $E$  de clauses a un modèle si il a un modèle de Herbrand

démo ( $\Leftarrow$ ) OK ( $\Rightarrow$ ) Il suffit de dire comment se comportent les prédicats

On prend comme interprétation des prédicats l'évaluation de ceux-ci sur les termes clos  
 $\hookrightarrow$  donnée par le modèle d'origine.

def On note  $\text{Inst}(E) = \{ \text{instances de } E \}$

$= \{ \text{clauses de } E \text{ où les variables sont remplacées par des termes clos} \}$   
 $\hookrightarrow$  1 élé de  $\text{Inst}(E)$  est en fait 1 formule du K prop: chaque terme clos est 1 val prop

Lemme 2 Si  $E$  n'a pas de modèle alors  $\exists E_0 \subset \text{Inst}(E)$  tq  $E_0 \subset \omega$  et n'a pas de modèle

démo. On aq  $E$  a un modèle  $\Leftrightarrow \text{Inst}(E)$  en a un

En effet, si  $E$  a un modèle (c'est la formule  $\forall x_1 \dots \forall x_n (C_1 \wedge \dots \wedge C_k)$  où

les  $C_i$  sont les clauses de  $E$  et les  $x_i$  les var intervenant ds les  $C_i$ ) alors / Lemme 1,

$p(t_1, \dots, t_n) \mapsto p^H(t_1, \dots, t_n)$   
 $E$  a un modèle de Herbrand  $H$  et  $v$ : terme clos (= prédicat  $p$  appliqué à des termes)

$\rightarrow$  valeur de  $p$  du terme est une valuation

satisfaisant toutes les formules de  $\text{Inst}(E)$ . Réciproquement, si on a un modèle  $p$

$\text{Inst}(E)$ , il convient pour  $E$ . (il donne l'interprétation des prédicats pour un modèle de Herbrand de  $E$ )

. Si  $E$  n'a pas de modèle,  $\text{Inst}(E)$  non plus donc par compacité du K prop,

$\exists E_0 \subset \omega$  et  $C \in E$  tq  $E_0 \cup \{C\}$  n'a pas de modèle.

Lemme 3 (dit de relèvement)  $\rightarrow$  permet de transformer une preuve "résolutive" en calcul prop  
en une preuve "résolution en logique du 1<sup>er</sup> ordre"

Soit  $C_1, C_2$  des clauses du 1<sup>er</sup> ordre;  $\sigma_1, \sigma_2$  des substitutions tq  $C_1[\sigma_1] = C'_1$  et  $C_2[\sigma_2] = C'_2$  sont sans variables libres. Si  $\exists C'$  sans variable libre tq  $\frac{C'_1 C'_2}{C'}$  résolution propositionnelle = res prop alors  $\exists \beta$  et  $C$  tq  $C[\beta] = C'$  et  $\frac{C_1 C_2}{C}$  résolution 1<sup>er</sup> ordre = res 1

démo on peut supposer que  $\text{supp}(\sigma_1) \cap \text{supp}(\sigma_2) = \emptyset$  (en renommant les var au pif)

Comme  $\frac{C'_1 C'_2}{C'}$  res prop,  $\exists L$  littéral tq  $C' = (C'_1 \setminus L) \cup (C'_2 \setminus \neg L)$ . Or,  $C_1[\sigma_1] = C'_1$  et  $C_2[\sigma_2] = C'_2$  donc  $\exists L_1, L_2$  tq  $L = L_1[\sigma_1] = L_2[\sigma_2]$ . Comme  $\text{supp}(\sigma_1) \cap \text{supp}(\sigma_2) = \emptyset$

$L = L_1[\sigma_1 \sigma_2] = L_2[\sigma_1 \sigma_2]$  (les var de  $L_1$  sont pas touchées par  $\sigma_2$  et réciproquement)

→ en particulier ça assure que ça a un if principal pour  $L_1$  et  $L_2$

Donc  $\sigma_1 \sigma_2$  unifie  $L_1$  et  $L_2$  donc  $\exists \beta$  tq  $\sigma_1 \sigma_2 = \beta \circ \sigma$  où  $\sigma$  = unificateur principal de  $L_1$  et  $L_2$

On a alors  $C' = \sigma_1 \sigma_2 ((C_1 \setminus L_1) \cup (C_2 \setminus \neg L_2)) = \beta \circ \sigma \underbrace{((C_1 \setminus L_1) \cup (C_2 \setminus \neg L_2))}_{= C}$

Ainsi  $C' = \beta C$  et  $\frac{C_1 C_2}{C}$  res 1 par résolution sur  $L_1$  et  $L_2$  (def de la règle)

démo du th

en fait on pourrait travailler avec  $\text{Inst}(E)$  entier. L'intérêt d'avoir 2 blocs ← c'est ① en vrai on peut pas travailler avec autre chose ② on prouve au passage la compacité du 1<sup>er</sup> ordre ③ np

Soit  $E$  sans modèle / lemme 2  $\exists E_0 \subset \text{Inst}(E) \Leftarrow$  qui n'a pas de modèle.

Par complétude de la résolution en K prop,  $\exists C'_1, \dots, C'_m$  ( $m \geq 1$ ) 1 réfutation de  $E_0$

On construit alors  $(C_i)_i$  1 réfutation de  $E$  à l'aide du lemme 3 et par induction:

→ Si  $C'_i \in E_0$ , / def  $\exists \sigma_i, C_i \in E$  tq  $C_i[\sigma_i] = C'_i$  sur l'arbre de preuve

→ Si  $j, k < i$  et  $\frac{C'_j C'_k}{C'_i}$  res prop, / induction  $\exists \sigma_j, \sigma_k, C_j, C_k$  tq  $C'_j = C_j[\sigma_j]$  et  $C'_k = C_k[\sigma_k]$

/ lemme 3,  $\exists \sigma_i, C_i$  tq  $C'_i = C_i[\sigma_i]$  et  $\frac{C_j C_k}{C_i}$  res 1 / res sur  $i$ , on comp

Hyp "  $\exists \sigma_1, \dots, \sigma_i \exists C_1, \dots, C_i \in E$

tq  $\forall k \leq i, C_k[\sigma_k] = C'_k$  et

$C_i$  est une preuve par résolution de  $C'_i$  à partir de  $E$

À la fin on a  $C'_m = \emptyset$  donc  $C_m = \emptyset$

et  $C_1, \dots, C_m$  est bien une réfutation de  $E$  en 1<sup>er</sup> ordre

④ on prouve aussi la compacité de la résolution au 1<sup>er</sup> ordre réel:

un ensemble de clauses  $E$  admet 1 modèle  $\Rightarrow$  tout sous ensemble  $\Leftarrow C \in E$  en a 1

→ si  $E$  a pas de modèle,  $\exists 1 \tilde{E} \Leftarrow C \in E$  qui a pas de modèle

Il faut montrer  $\Leftarrow$ : on montre la contraposée: Si  $E$  admet pas de modèle, par complétude

$\exists 1$  réfutation de  $E$  et, comme vu de la preuve, cette réfutation est 1 réfutation

d'1 réfutation en K prop n'utilisant qu'1 mb  $\Leftarrow E_0$  de clauses au début. Donc

la réfutation 1<sup>er</sup> ordre utilisée elle aussi 1 mb  $\Leftarrow$  de clauses qui forment 1 ensemble  $\tilde{E} \Leftarrow C \in E$

Par complétude de la résolution,  $\tilde{E}$  n'a pas de modèle et ça conclut

→  $\tilde{E} \vdash \perp \Rightarrow \tilde{E} \neq \perp$  car si modèle de  $\tilde{E}$  est modèle de  $\perp$ . Or  $\perp$  a pas de modèle.