cv lente [X-ENS analyse 1 p 99]

- Th Soit $f : [0,c] \to [0,c>0]$ continue, $a>0$, $\alpha>1$ tq

f admet 1 dev en 0 $f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$

Alors $\exists \eta > 0$ tq $[0,\eta]$ est stable par f et la suite def par $u_0 \in [0,\eta]$, $u_{n+1} = f(u_n)$

cv vers 0. De plus $u_n \underset{+\infty}{\sim} (na(\alpha-1))^{\frac{1}{1-\alpha}}$

démo / C^0 de f, $f(0) = 0$

Le dl assure $\exists\ \varepsilon : [0,c] \to \mathbb{R}$ tq $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et tq

$f(x) = x - ax^\alpha + x^\alpha \varepsilon(x) = x - x^\alpha(a - \varepsilon(x))$ comme $a>0$,

$\exists \eta > 0$, $\forall x \in [0,\eta]$, $|\varepsilon(x)| < a$ donc $\forall x \in]0,\eta]$, $f(x) < x$ $(*)$

et $\forall x \in [0,\eta]$, $|x^{\alpha-1}(a-\varepsilon(x))| < 1$ donc $\forall x \in]0,\eta]$, $f(x) > 0$ $(**)$

(car $x^{\alpha-1}(a-\varepsilon(x)) \to 0$ car $\alpha > 1$)

Donc $[0,\eta]$ est f stable.

Soit $u_0 \in [0,\eta]$. $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien def et $\searrow$ par $(*)$

et minorée par $(**)$

Donc $(u_n)_n$ cv vers le seul pt fixe de f ds $[0,\eta]$ à savoir 0 (/ C^0 de f)

$\hookrightarrow$ car si $x \in]0,\eta]$, $f(x) < x$ par $(*)$

Déterminons 1 réel β tq $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait 1 limite $\neq 0$

$$f(x)^\beta - x^\beta = (x - ax^\alpha + o(x^\alpha))^\beta - x^\beta$$
$$= x^\beta\left((1 - ax^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}))^\beta - 1\right)$$
$$= x^\beta\left(-a\beta x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})\right)$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} -a\beta x^{\alpha+\beta-1}$$

Avec $\beta = 1-\alpha \neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)^\beta - x^\beta) = -a\beta = a(\alpha-1)$

Comme $u_n \xrightarrow[n\to 0]{} 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta) = a(\alpha-1)$ aussi

Or la moyenne de Cesaro de $(u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta})_n$ cv vers cette m̂ limite :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{\beta} - u_k^{\beta})}{n} = \frac{u_n^{\beta} - u_0^{\beta}}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} a(\alpha - 1)$$

Donc $u_n^{1-\alpha} \sim n a(\alpha - 1)$

cad $u_n \sim n a(\alpha - 1)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

+ finir 1 ex avec $f : x \longmapsto \sin(x)$