Générateurs du groupe linéaire [Oraux X-ENS alg 2 p 177]

Th Soit $n \geqslant 2$ et K un corps.

Alors $SL_n(K)$ est engendré par les transvections et $GL_n(K)$ par les transvections et dilatations.

Rappel Toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ où $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$ est une matrice de transvection ; toute matrice de la forme $I_n + (\alpha - 1) E_{ii}$ où $\alpha \neq 1$ est une dilatation.

Rq Le théorème reste vrai même pour $n = 1$

La seule matrice de $SL_1(K)$ est (1) qui est produit de 0 transvections et les matrices de $GL_1(K)$ sont de la forme (α) où $\alpha \neq 0$ donc sont des dilatations

démo Th • On remarque d'abord que multiplier à gauche une matrice $M \in M_n(K)$ (resp. à droite) par une matrice de transvection $T_{ij}(\lambda)$ revient à effectuer sur les lignes (resp. colonnes) l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$)

On peut aussi échanger 2 lignes (ou deux colonnes) en multipliant M à droite (resp. à gauche) par le produit de transvections $T_{ij}(1)\, T_{ji}(-1)\, T_{ij}(1) = T$

Plus précisement, TM est la matrice M dans laquelle $L_i \leftarrow L_j$ et $L_j \leftarrow -L_i$

MT " " " " " " $C_i \leftarrow C_j$ et $C_j \leftarrow -C_i$

• Soit $A \in GL_n(K)$. Comme A est inversible, sa première colonne est non nulle. Deux cas se présentent alors :

→ si $\exists\, i \geqslant 2$ tq $a_{i1} \neq 0$, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{a_{11} - 1}{a_{i1}} L_i$ permet de mettre un "1" en position $(1,1)$ dans A

→ sinon, on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_2$ (donc $L_2 \leftarrow -L_1$) et on se retrouve dans le cas précédent car $a_{11} \neq 0$

Puis, en utilisant le coefficient en position $(1,1)$ (qui vaut désormais 1) comme pivot, on peut annuler tous les autres coefficients de la $1^{ère}$ ligne et de la $1^{ère}$ colonne.

Matriciellement, on vient de montrer qu'il existe des transvections $T_1, \dots T_r, T_1', \dots T_s'$

telles que $\quad T_r \dots T_1 A T_1' \dots T_s' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$ avec $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$

on réapplique le même algorithme à A_1 pour conclure à l'existence

de transvections toujours notées $T_1, \dots T_r, T_1', \dots T_s'$ telles que

$$T_r \dots T_1 A T_1' \dots T_s' = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots 1 & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix} = I_\alpha$$

Comme le déterminant d'une transvection est 1, $\alpha = \det(A)$

L'inverse d'une transvection $T_{ij}(\lambda)$ étant une transvection (à savoir $T_{ij}(-\lambda)$),

on peut donc écrire $\quad A = \tau_1 \dots \tau_r I_\alpha \tau_1' \dots \tau_s'$ avec les τ_i et τ_i' des transvections

- Conclusions : Si $A \in SL_n(K)$, $I_\alpha = I_n$ donc A est bien 1 produit de transvections

  Si $A \in GL_n(K)$, I_α est une dilatation donc A est produit de transvections et dilatations (et on vient de montrer qu'une seule dilatation suffit)

appli 1 Si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $SL_n(K)$ est connexe par arcs

démo : Soit $M \in SL_n(K)$ et montrons qu'on peut relier M à I_n

Par ce qui précède, $M = \prod_{(i,j) \in X} T_{ij}(\lambda_{ij})$ où X est une partie de $[\![1, n]\!]^2$

tq $i \neq j$ et $\lambda_{ij} \neq 0$

On construit alors $\varphi : \begin{cases} [0,1] \longrightarrow SL_n(K) \\ t \longmapsto \prod_{(i,j) \in X} T_{ij}(t\lambda_{ij}) \end{cases}$

φ est continue, bien définie et $\varphi(0) = I_n$ et $\varphi(1) = M$. D'où le résultat.