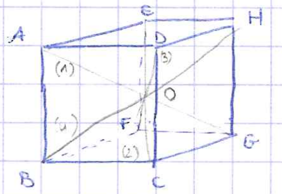
Isométries du cube [H_2G_2 1 p 365] - Explication ρ ?

(Th) Soit C un cube. $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq S_4$

(Rq) $\mathrm{Isom}^+(C)$ = gp des isométries affines ≥ 0 de C = gp des déplacements

(= les transformations qu'on peut vraiment faire)

démo : $C =$ 

on numérote les gds diagonales de D_1 à D_4 et $\mathcal{D}$ leur ensemble

et on centre C en O

Les axes sont choisis pour que les figures correspondent avec la vue miroir ? C

- Soit $f \in \mathrm{Isom}(C)$. Alors f conserve les distances (et la longueur d'1 gde diag est la + gde distance possible entre 2 pts de C) donc f envoie $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$

  D'où l'$\exists$ d'1 morphisme $\rho : \mathrm{Isom}(C) \longrightarrow S_4$ ≃ permutations de $\mathcal{D}$

- Montrons que $\mathrm{Ker}(\rho|_{\mathrm{Isom}^+(C)}) = \{id\}$

  Si $f \in \mathrm{Ker}(\rho)$, $\forall i \in [\![1,4]\!]$, $f(D_i) = D_i$. Si $f = id$, OK.

  Sinon, $\exists i_0$ tq f échange les sommets de $D_{i_0} = [AG]$ sans perte de généralité.

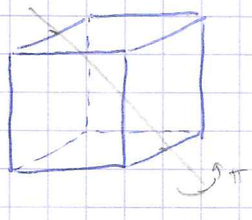
  Mais alors $f(A) = G$ et $d(f(A), f(B)) = d(A,B) \Rightarrow f(B) = H$ et en itérant, on mq f échange les sommets de toutes les diagonales. Donc $f = s_0$ = symétrie $/_r$ à O

  Mais $\det(s_0) = -1$ donc $\mathrm{Ker}(\rho|_{\mathrm{Isom}^+(C)}) = \{id\}$

- Montrons que $\rho : \mathrm{Isom}^+(C) \longrightarrow S_4$ est surjective (on sait déjà qu'elle est injective)

  → les transpositions, /ex $(1,2)$ sont obtenues par rotation d'angle π et d'axe passant par le milieu des arêtes

  On en a bien 6 (autant que de paires de sommets)



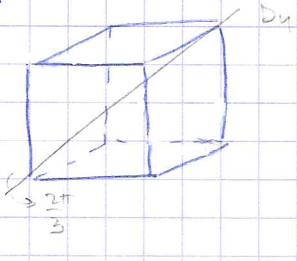
fixe D_3 et D_4

$D_1 \longleftrightarrow D_2$

(1)

  → les 3-cycles /ex $(1\ 3\ 2)$ sont obtenus par rotation autour de l'axe D_i et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ ou $-\frac{2\pi}{3}$

  Il y en a bien 8 (2 rotations pour chacune des 4 diagonales)

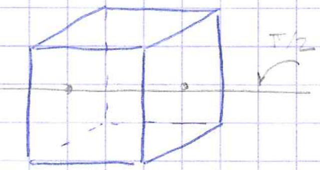


(2)

  → l'identité = OK

→ les 4 cycles /ex $(1\ 2\ 3\ 4)$ sont obtenus par les rotations de $\pm\frac{\pi}{2}$ autour d'1 axe passant par 2 centres de faces opposées

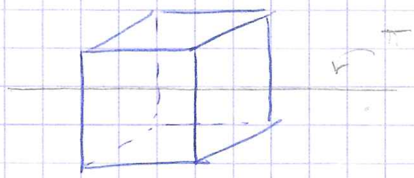
Il y en a bien 6 (2 rotations par paires de faces)



③

→ les doubles transpositions /ex $(13)(24)$ sont obtenues par les rotation de π autour d'1 axe passant par les 2 centres de faces opposées

Il y en a bien 3 (autant que de paires de faces)



④

Donc pour toute permutation σ de S_4 (on a décrit tous les types possibles), on a trouvé 1 antécédent de σ ds $Isom^+(C)$

⚠ c'est 1 morphisme mais par ... restriction d'1 morphisme

• Conclusion : $\rho : Isom^+(C) \longrightarrow S_4$ est bij et reste un morphisme

Donc $Isom^+(C) \simeq S_4$

appli Il y a 57 manières ≠ de colorier 1 cube avec 3 couleurs

démo • $Isom^+(C)$ agit sur $C_{colorié}$ / Burnside, nb de coloriages ≠ = nb d'orbites

$$= \frac{1}{|Isom^+(C)|} \sum_{\sigma \in Isom^+(C)} |Fix(\sigma)|$$

où $|Fix(\sigma)|$ = nb de coloriages qui st invariants par σ

On calcule ces quantités

→ pour les ① : les faces vont 2 par 2 donc fixer 3 couleurs suffit à tout avoir

⟹ comme y a 3 couleurs possibles, 3^3 pts fixes par transformation de types ①

→ pour les transformations ②, 2 groupes de 3 faces ont la m̃ couleur ⟹ 3^2 pt fixes

→ pour les transformations ③ : les 2 faces par lesquelles passe l'axe sont coloriées comme on veut et les 4 autres ont m̃ couleur ⟹ 3^3 pts fixes par transformation de type ③

→ pour les transformations ④ : on peut de m̃ choisir la couleur des 2 faces par lesquelles passe l'axe et les autres faces (4) vont 2 par 2 ⟹ 3^4 coloriages fixes par 1 transfo ④

pour l'identité

D'où nb de coloriages ≠ $= \frac{1}{24}\left(6 \times 3^3 + 8 \times 3^2 + 6 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + 1 \times 3^6\right)$

$= 57$

3 couleurs ...