# Kaczmarz

confondu ($M_{N,1}(\mathbb{R})$)

**notations** On se place ds $\mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ (euclidien)

Soit $A \in GL_N(\mathbb{R})$ et $b \in M_{N,1}(\mathbb{R})$. On cherche à approximer l'! solution $\bar{x}$ de $Ax = b$.

On note $a_1, \dots, a_N$ les vecteurs colonne tq $\forall i \ {}^t a_i = i^e$ ligne de $A$

et aussi $\forall i \in [\![1, N]\!]$, $u_i = \dfrac{a_i}{\|a_i\|}$ et $\beta_i = \dfrac{b_i}{\|a_i\|}$

double inclusion

et $H_i = \{ z \in M_{N,1}(\mathbb{R}) \mid {}^t u_i z = \beta_i \} = \beta_i u_i + \mathrm{Vect}(u_i)^\perp$

**Lemme 1** L'intersection des hyperplans $H_i$ est tq $\bigcap_{i=1}^{N} H_i = \{\bar{x}\}$

<u>démo</u> $z \in \bigcap_{i=1}^{N} H_i \iff \forall i \in [\![1, N]\!],\ {}^t u_i z = \beta_i \iff \forall i \ {}^t a_i z = b_i \iff Az = b \iff z = \bar{x}$

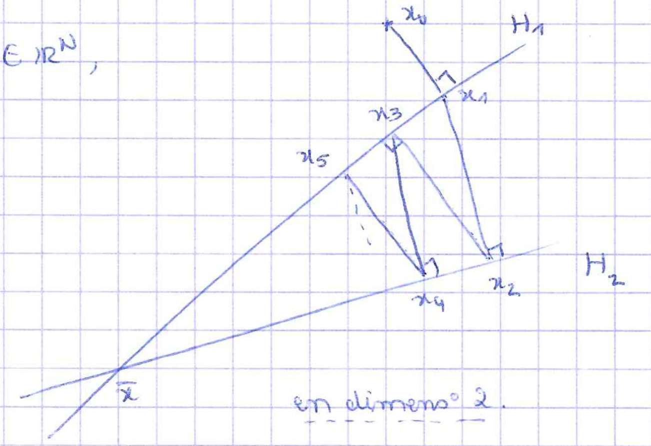
La méthode de Kaczmarz consiste à : choisir $x_0 \in \mathbb{R}^N$,

projeter $x_0$ sur $H_1$ pour obtenir $x_1$

projeter $x_1$ sur $H_2$ pour obtenir $x_2$

--- projeter $x_{N-1}$ sur $H_N$ pour obtenir $x_N$

puis recommencer à partir de $x_N$




en dimension 2.

But : mq la méthode cv + complexité

**Lemme 2** Soit $u \in \mathbb{R}^N$ de norme 1. La matrice $M$ de la proj orthogonale sur $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ est égale à $I_n - u\,{}^t u$. De plus, $|||M||| = 1$ et $\forall x \notin \mathrm{Vect}(u)^\perp$, $\|Mx\| < \|x\|$

<u>démo</u> Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Le projeté orthogonal $\pi(x) = Mx$ de $x$ est carac par $\begin{cases} \pi(x) \in \mathrm{Vect}(u)^\perp \\ \forall z \in \mathrm{Vect}(u)^\perp,\ \langle z, \pi(x) - x \rangle = 0 \end{cases}$

Notons $y = (I_n - u\,{}^t u)x = x - u\,{}^t u\, x$

On a $\langle u, y \rangle = \langle u, x \rangle - \langle u, u\,{}^t u x \rangle = {}^t u x - \underbrace{{}^t u u}_{=1}\,{}^t u x = 0$ donc $y \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$

De plus, $\forall z \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$, $\langle z, y - x \rangle = \langle z, u\,{}^t u x \rangle = \underbrace{{}^t z u}_{=0}\,{}^t u x = 0$

Donc $y = \pi(x)$ ce qui assure que $I_n - u\,{}^t u = M$

Pythagore car $Mx$ et $(I-M)x$ sont $\perp$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\|^2 = \|Mx + (I - M)x\|^2 = \|Mx\|^2 + \|(I - M)x\|^2 \underset{(*)}{\geq} \|Mx\|^2$

donc $|||M||| \leq 1$ et on a atteinte pour tout $x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp$ donc $|||M||| = 1$

Enfin, si $x \notin \mathrm{Vect}(u)^\perp$, $(I - M)x \neq 0$ donc $(*)$ est stricte comme prévu.

Notons dès lors $M_i$ la matrice de proj $\perp$ sur $\mathrm{Vect}(u_i)^{\perp}$ et $T = M_N \cdots M_1$

La suite $(x_n)_n$ def ds la méthode de Kaczmarz est de def /rec par $x_{n+1} = M_r x_n + \beta_r u_r$

où $r = (n+1) \bmod N$.

(Th) La méthode de Kaczmarz converge : $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{x}$

<u>démo</u> Notons $\varepsilon_n = x_n - \overline{x}$ l'erreur au rg $n$ et mq $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On rq $x_{n+1} = M_r x_n + \beta_r u_r$ et $\overline{x} = \beta_r u_r + M_r \overline{x}$ car $\overline{x} \in H_r$

$\left( \text{donc } \overline{x} - \beta_r u_r \in \mathrm{Vect}(u_r)^{\perp} \Rightarrow M_r(\overline{x} - \beta_r u_r) = \begin{cases} \overline{x} - \beta_r u_r \\ M_r \overline{x} \end{cases} \right)$

Donc $\forall n \geq 0$, $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - \overline{x} = M_r(x_n - \overline{x}) = M_r \varepsilon_n$

On en déduit que $\forall n \geq 0$, $\|\varepsilon_{n+1}\| \leq \underbrace{|||M_r|||}_{= 1} \|\varepsilon_n\| \leq \|\varepsilon_n\|$

Donc $(\|\varepsilon_n\|)_n \searrow$ et est minorée par zéro $\Rightarrow$ elle cv vers $l \in \mathbb{R}$

Pour déterminer $l$, il suffit de déterminer la limite de la suite extraite $(\varepsilon_{Nk})_{k \geq 0}$ (c'est la m̂)

Or, $\forall k \geq 0$, $\|\varepsilon_{Nk}\| \leq |||T|||^k \|\varepsilon_0\|$ (par récurrence)

Il suffit donc de mq $|||T||| < 1$

Soit $x \neq 0$ et mq $\|Tx\| < \|x\|$ (ça conclura)

$\rightarrow$ si $x$ est tq $\exists i \in [\![ 0, N ]\!]$ tq $M_i \cdots M_1 x \notin \mathrm{Vect}(u_{i+1})^{\perp}$,

le lemme assure que $\|Tx\| = \|M_N \cdots M_{i+1}(M_i \cdots M_1)x)\| \leq \underbrace{|||M_N|||}_{\leq 1} \cdots \underbrace{|||M_{i+2}|||}_{\leq 1} \underbrace{\|M_{i+1}(M_i \cdots M_1 x)\|}_{< \|M_i \cdots M_1 x\|}$

donc $\|Tx\| \leq \|M_i \cdots M_1 x\| \leq \|x\|$ tjrs / lemme

de $x \neq 0$ hypothèse [illegible]

de $x$ est [illegible] de $A x = 0$ donc $x = 0$

$\rightarrow$ sinon, $\forall i \in [\![ 0, N-1 ]\!]$, $M_i \cdots M_1 x \in \mathrm{Vect}(u_{i+1})^{\perp}$ et alors $\forall i \in [\![ 0, N-1 ]\!]$, $M_i \cdots M_1 x = x$ (/rec)

car $P_i x = x$

de $\langle u_1, x \rangle = 0$ donc ${}^t a_1 x = 0$ puis $\langle u_2, M_1 x \rangle = \begin{cases} \langle u_2, x \rangle \\ 0 \end{cases}$ donc ${}^t a_2 x = 0$

/rec on en déduit que $\forall i$ ${}^t a_i x = 0 \Rightarrow x = 0$ car $A \in GL_N(\mathbb{R}) \Rightarrow$ X

(rq) Complexité de l'algo. Pour calculer $x_{n+1} = M_r x_n + \overbrace{\beta_r u_r}^{N \text{ multiplications}}$, puis $N$ additions

on calcule $M_r x_n = (I_N - u_r {}^t u_r) x_n = x_n - u_r {}^t u_r x_n = x_n - \underbrace{\langle u_r, x_n \rangle}_{N \text{ multiplications}} u_r$

Donc une itération se fait en $O(N)$ $\Rightarrow$ algo en $O(N^2)$ car l'ordre de grandeur du

nb d'itérations est $N$

(rq) Si $A$ est orthogonale, la méthode est exacte et on y arrive en $\leq N$ étapes.