

• Th : soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $n \in [0, \min(m, n)]$

Notons $A_n = \{ M \in M_{m,m}(\mathbb{F}_q) \mid \text{rg}(M) = n \}$

Alors $|A_n| = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (q^m - q^i)(q^m - q^i)}{(q^2 - q^i)}$

• lemme $m, n \in \mathbb{N}^*$, $|M_{m,m}(\mathbb{F}_q)| = q^{m^2}$ et $|GL_m(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=0}^{m-1} (q^m - q^i)$

démo : OK pour le 1^{er}. $|GL_m(\mathbb{F}_q)| = m!$ de familles libres de colonnes de taille m de $\mathbb{F}_q$. Or, le 1^{er} vecteur d'une telle famille est choisi parmi toutes les colonnes $\setminus \{0\}$ de $\mathbb{F}_q$ à $q^m - 1$. Le 2^e choisi parmi tous les vecteurs $\setminus$ des q vecteurs colinéaires au 1^{er} ... OK

• démo H $\left. \begin{array}{l} GL_m(\mathbb{F}_q) \times GL_m(\mathbb{F}_q) \text{ agit par conjugaison sur } M_{m,m}(\mathbb{F}_q) \\ \text{via } (P, Q) \cdot M \mapsto PMQ^{-1} \end{array} \right\}$

→ Or, M et $N \in \hat{m}$ orbite sous l'action $\mathcal{C} \Rightarrow \text{rg}(M) = \text{rg}(N)$

En effet $\Rightarrow$ OK car M et N représentent le $\hat{m}$ endos de 2 bases $\neq$

$\Leftarrow$ Montrons que $\text{rg}(M) = n \Rightarrow M$ est de l'orbite de $J_n = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

(Alors si M et N sont de même rg , M et N sont de l'orbite de J_n = la $\hat{m}$ orbite)

Il s'agit, en notant u l'ALCA : $\mathbb{F}_q^m \rightarrow \mathbb{F}_q^m$, de trouver 1 base B de $\mathbb{F}_q^m$,

et B' de $\mathbb{F}_q^m$ tq $\text{Mat}_{B',B}(u) = J_n$

/ R du rg , $\dim \text{Ker}(u) = m - n$. Soit $(e_{n+1}, \dots, e_m)$ 1 base de $\text{Ker}(u)$

qui on complète en 1 base $B = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_m)$ de $\mathbb{F}_q^m$.

Montrons que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i u(e_i) = 0 &\Rightarrow u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(u) \cap \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \\ &\text{car } (e_i) \text{ est libre} \end{aligned}$$

On peut donc compléter $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ en $B' = (u(e_1), \dots, u(e_n), f_{n+1}, \dots, f_m)$

et $\text{Mat}_{B',B}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$ donc OK

On en déduit que A_n est une orbite : celle de J_n

→ on k son cardinal via la relation orbite-stabilisateur :

$$|A_n| = |\text{orb}(J_n)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q) \times GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\text{Stab}(J_n)|}$$

on, si $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{F}_q)$ et $Q = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{F}_q)$

sont tq $(P, Q) \in \text{Stab}(J_n)$ alors $PJ_nQ^{-1} = J_n$ i.e. $PJ_n = J_nQ$

i.e. $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix}$ donc $A = A'$ et $C = B' = 0$

donc $\text{Stab}(J_n) \subset \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & 0 \\ C' & D' \end{pmatrix} \right\}$, $A \in GL_n(\mathbb{F}_q)$, $D \in GL_{m-n}(\mathbb{F}_q)$, $D' \in GL_{m-n}(\mathbb{F}_q)$,

(i.e. on peut tout faire
pour $n=0$)

$B \in M_{n, m-n}(\mathbb{F}_q)$, $C' \in M_{m-n, n}(\mathbb{F}_q) \} = S$

Réciproquement on vérifie que $S \subset \text{Stab}(J_n)$.

On en déduit que $|\text{Stab}(J_n)| = |GL_n(\mathbb{F}_q)| |GL_{m-n}(\mathbb{F}_q)| |GL_{m-n}(\mathbb{F}_q)| |M_{n, m-n}(\mathbb{F}_q)|$
 $\times |M_{m-n, n}(\mathbb{F}_q)|$

→ on utilise la formule et $|A_n| = \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (q^m - q^i) \prod_{i=0}^{n-1} (q^m - q^i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) \underbrace{q^{n(m-n)} \prod_{i=0}^{m-n-1} (q^{m-n} - q^i)}_{=(q^2)^{m-n}} q^{n(m-n)} \prod_{i=0}^{n-1} (q^{m-n} - q^i)}$

$$= \frac{\prod_{i=0}^{m-n-1} (q^m - q^i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (q^m - q^i)} = \frac{\prod_{i=n}^{m-1} (q^m - q^i)}{\prod_{i=n}^{m-1} (q^m - q^i)}$$

en simplifiant

$$= \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (q^m - q^i) \prod_{i=0}^{n-1} (q^m - q^i)}{\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i)}$$

$$= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(q^m - q^i)(q^m - q^i)}{(q^n - q^i)}$$