Méthode itérative [Ciarlet p 96]

$A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$. On étudie $Ax = b$ (Tout ce qui suit marche aussi ds $\mathbb{C}$)

(déf) Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $N \in M_n(\mathbb{R})$ st tq $A = M - N$, on dit que la méthode itérative associée à (M,N) converge si pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite de 1^{er} terme u_0 et tq $\forall k \geq 0$, $u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$ converge (rq cette cv se fait forcément vers 1 solution de $Ax = b$)

(Th) La méthode itérative associée à (M,N) cv ssi $\rho(M^{-1}N) < 1$

(Lemme) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Alors $\exists$ 1 norme subordonnée $||| \ |||$ tq $|||A||| \leq \rho(A) + \varepsilon$

(rq) Comme $\forall$ norme subordonnée, $|||A||| \leq \rho(A)$, $\rho(A) = \inf_{||| \ ||| \text{ sub}} |||A|||$

<u>démo lemme</u> Soit $\varepsilon > 0$

Comme $A \in M_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T = (t_{ij})_{ij} \in T_n^+(\mathbb{C})$ tq $A = PTP^{-1}$

Soit $\delta > 0$. On note $D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \delta & \\ 0 & & \ddots \ \delta^{n-1} \end{pmatrix}$

Alors $D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta = D_\delta^{-1} T D_\delta$ est une matrice triangulaire supérieure tq, par calcul

$$= \begin{pmatrix} t_{11} & \delta t_{12} & \delta^2 t_{13} & \cdots & \delta^{n-1} t_{1n} \\ & t_{22} & \delta t_{23} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \delta t_{n-1\,n} \\ & & & & t_{nn} \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\lim_{\delta \to 0} D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta = \begin{pmatrix} t_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{nn} \end{pmatrix}$ avec $\{t_{ii}\}_i = Sp(A)$

puis par continuité de $||| \ |||_\infty$ que $|||D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta|||_\infty \xrightarrow[\delta \to 0]{} \max_{i=1}^{n} |t_{ii}| = \rho(A)$

On a donc (/ déf lim) : $\exists \delta_0 > 0$ tq $\forall |\delta| \leq \delta_0$, $\left| |||D_\delta^{-1} P^{-1} A P D_\delta|||_\infty - \rho(A) \right| \leq \varepsilon$

En particulier, $\underbrace{|||(PD_{\delta_0})^{-1} A (PD_{\delta_0})|||_\infty}_{= N_{\delta_0}(A)} \leq \rho(A) + \varepsilon$

$= N_{\delta_0}(A)$ qui est une norme subordonnée à $\| \ \| : x \mapsto \|(PD_{\delta_0})^{-1} x\|_\infty$

(démo : si $Q \in GL_n$, $\|Q^{-1}AQ\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Q^{-1}AQx\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup \frac{\|Q^{-1}Ay\|_\infty}{\|Q^{-1}y\|_\infty}$

par chgmt var $y = Qx$)

<u>démo du th</u>

Soit u tq $Au = b$ (càd $Mu \overset{(*)}{=} Nu + b$) et notons $e_k = u_k - u$

Alors $\forall k \geq 0$, $e_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b) - u \overset{(*)}{=} M^{-1}(Nu_k + b) - M^{-1}(Nu + b) = M^{-1}N(u_k - u)$

$= M^{-1}N e_k$

$\forall k \geq 0$, $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$

Alors • si $\rho(M^{-1}N) < 1$, on fixe $\varepsilon = \dfrac{1-\rho(M^{-1}N)}{2}$ et le lemme donne l'$\exists$ d'1

norme subordonnée (donc sous multiplicative) tq $|||M^{-1}N||| \leq \rho(M^{-1}N) + \varepsilon < 1$

Donc, pour $\| \ \|$ dont découle $||| \ |||$, on a $\forall k \geq 0$, $\|e_k\| \leq |||M^{-1}N|||^k \|e_0\|$

et comme $|||M^{-1}N||| < 1$, cela assure que $e_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ donc que $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} u$

Cela montre $(\Leftarrow)$

• si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$, soit λ vp de $M^{-1}N$ de module ≥ 1 et v un $\vec{vp}$ associé à λ

Supposons / abs que $e_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. Cela implique $(M^{-1}N)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

donc que $(M^{-1}N)^k v \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

$$\overset{\shortparallel}{\lambda^k v} \ \not\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } v \neq 0$$

Donc $e_k \not\to 0$ donc $u_k \not\to u$ et comme $(u_k)_k$ ne peut converger que vers u,

$(u_k)_k$ diverge. Cela montre $(\Rightarrow)$

Si $(u_k)_k$ cv c'est vers u donc $e_k \xrightarrow[+\infty]{} 0$ -

Comme $e_k = (M^{-1}N)^k e_0$, cela $\Rightarrow$ $(M^{-1}N)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (ou $e_0 = 0$ mais

on veut cv $\forall$ le pt de départ) donc / C° $|||(M^{-1}N)^k||| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour $||| \ |||$ subordonnée

(19) Jacobi : $M = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ et $N = M - A$. On note $J = M^{-1}N$

Soit λ vp de $M^{-1}N$ et v $\vec{vp}$ associé

Alors $\dfrac{\|(M^{-1}N)^k v\|}{\|v\|} \leq |||(M^{-1}N)^k||| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Gauss - Siedel : $M = D - E$ et $N = F$ où $A = \begin{pmatrix} \diagdown & & -F \\ & D & \\ -E & & \diagdown \end{pmatrix}$. On note $L_1 = M^{-1}N$

$$|\lambda|^k = \frac{|\lambda|^k \|v\|}{\|v\|}$$

Relaxation : $M = \dfrac{D}{\omega} - E$ et $N = \dfrac{1-\omega}{\omega} D + F$. On note $L_\omega = M^{-1}N$

donc $|\lambda| < 1$

Donc $\rho(M^{-1}N) < 1$

(19) $\rho(L_\omega) \geq |\omega - 1|$ par calcul de déterminant donc Relaxation ne peut converger que si $\omega \in \,]0, 2[$