Formule sommatoire de Poisson [Gourdon analyse p 272-273]

+ [Gourdon analyse p 164]

(Th) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 tq $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ qd $|x| \to +\infty$

(on peut remplacer 2 par $\alpha > 1$)

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ cvn sur tout compact de $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)\, e^{2i\pi n x} \quad \text{où } \forall x \in \mathbb{R},\ \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi t x}\, dt$$

transformée de Fourier de F en n

démo • Comme $f(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $\exists M > 0,\ \forall |x| \geq 1,\ |f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$

Notons $\forall n \in \mathbb{Z}$ $f_n : x \mapsto f(x+n)$

Soit $K > 0$ et $x \in [-K, K]$

Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$ tq $|n| \geq K+1$, on a $|x+n| \geq 1$ ce qui assure que

$$|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

On en déduit que $\|f_n\|_{\infty, [-K,K]} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et comme $\frac{1}{n^2}$ = TG cv, cela assure la cvn attendue sur $[-K, K]$ puis sur tout compact de $\mathbb{R}$

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n f(x+n)$ cv vers $F(x)$ (cvn $\Rightarrow$ cvs)

Comme les m̂ hyp pèsent sur f', le m̂ raisonnement mq $\sum_n f'(\cdot+n)$ cvn sur tout compact donc F est C^1 sur tout compact donc sur $\mathbb{R}$

• F est 1-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-N}^{N} f(x+n+1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n) \text{ donc } N \to +\infty \text{ donne } F(x+1) = F(x)$$

On peut donc parler des coeffs de Fourier de F

• Calculons les : Soit $n \in \mathbb{Z}$

$f_n = \sum_{k=-n}^{n} f(t+k)$ et $(f_n)_n$ cvu sur compact $[0,1] \Rightarrow \int_0^1 F(t) = \int_0^1 \lim_n f_n = \lim_n \int_0^1 f_n$

$$\begin{aligned}
c_n(F) &= \int_0^1 F(t)\, e^{-2i\pi n t}\, dt \quad \text{par déf} \\
&= \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t+k)\, e^{-2i\pi n t}\, dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k)\, e^{-2i\pi n t}\, dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(u)\, e^{-2i\pi n u} \underbrace{e^{2i\pi n k}}_{=1}\, dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(u)\, e^{-2i\pi n u}\, du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2i\pi n u}\, du = \hat{f}(n)
\end{aligned}$$

interversion possible car cvn de cvu sur le compact $[0,1]$

(chgmt var $t+k = u$)

(qui est bien déf car $f(x) \underset{|x|\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$)

- Comme F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de F cvn vers F sur $\mathbb{R}$ donc

en particulier $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(F)\, e^{2i\pi m x}$

cad $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(x+m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m)\, e^{2i\pi m x}$

appli $\forall s \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi m^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi m^2}{s}}$ (ça cmp la fct° $s \longmapsto \sum e^{-\pi m s^2}$ cv vers 0 qd $s \to +\infty$ par ex)

démo Soit $\alpha > 0$. On veut appliquer le th à $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ (qui respecte les hyps)

Pour cela, on K les $\hat{f}(m)$: Soit $m \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2i\pi m x}\, dx \underset{u = \sqrt{\alpha}\, x}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi m u}{\sqrt{\alpha}}}\, du}_{= I(m) \ / \text{def}}$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto I(x)$ est bien def. On en cherche 1 expression sans intégrale

or, $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\alpha}}}\right) \right| = \left| e^{-u^2} \times \left(-\frac{2i\pi u}{\sqrt{\alpha}}\right) e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\alpha}}} \right| = \left| \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} u e^{-u^2} \right| \in L^1(\mathbb{R})$

donc $I \in C^1$ et on peut dériver :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \times \left(-\frac{2i\pi u}{\sqrt{\alpha}}\right) e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\alpha}}}\, du$$

IPP $\quad g = + e^{-u^2}, \ g' = -2u e^{-u^2}$

$h' = -\frac{2i\pi x}{\sqrt{\alpha}} e^{\cdots}, \quad h = e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\alpha}}}$

$$= \frac{i\pi}{\sqrt{\alpha}} \left(\underbrace{\left[e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\alpha}}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \times \frac{2i\pi x}{\sqrt{\alpha}} e^{\cdots}\, du \right)$$

$$= \frac{i\pi}{\sqrt{\alpha}} \times \frac{2i\pi}{\sqrt{\alpha}} x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\alpha}}}\, du$$

$$= -\frac{2\pi^2 x}{\sqrt{\alpha}} I(x)$$

Résoudre cette equadiff donne $\forall x \in \mathbb{R}, \ I(x) = I(0)\, e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\sqrt{\alpha}}}$

et comme $I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \int$ de Gauss $= \sqrt{\pi}$

on a finalement $\forall m \in \mathbb{Z}, \ \hat{f}(m) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi^2 m^2}{\sqrt{\alpha}}}$

On en déduit que (formule de Poisson en $x = 0$)

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) \quad \text{cad} \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha m^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi^2 m^2}{\sqrt{\alpha}}}$$

On obtient la formule attendue en faisant $\alpha \leftarrow \pi s$.