Suite de polygones

Lemme 1 (déterminant circulant)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & & \ddots & \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice circulante et $P_A = \sum_{k=1}^{n} a_k X^{k-1}$

Alors $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} P_A(\omega^k)$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

démo On note $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \omega & \omega^2 & & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & \omega^{n-1} & (\omega^2)^{n-1} & & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$ (comme dans FFT)

On rq $\det(\Omega) \neq 0$ car c'est 1 det de Vandermonde (car les ω^i 2 à 2 $\neq$)

On rq aussi $\det(A\Omega) \overset{K}{=} \det \begin{pmatrix} P(1) & P(\omega) & \cdots & P(\omega^{n-1}) \\ \vdots & P(\omega)\omega & & P(\omega^{n-1})\omega^{n-1} \\ \vdots & & & \\ P(1) & P(\omega)\omega^{n-1} & & P(\omega^{n-1})(\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$ (à cause de $\omega^{-i} = \omega^{n+i}$)

Donc $\det(A\Omega) = \begin{cases} \det(A)\det(\Omega) & \text{par multiplicativité} \\ P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\det(\Omega) & \text{/ prop du det.} \end{cases}$

Comme $\det(\Omega) \neq 0$, on obtient $\det(A) = \prod_{i=0}^{n-1} P(\omega^i)$ comme prévu.

Th Soit $z^{(0)} = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On def pour tout $k \in \mathbb{N}$

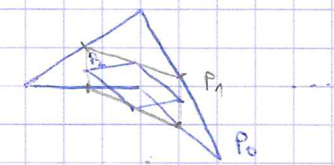
$$z^{(k+1)} = \left(\frac{z_1^{(k)} + z_2^{(k)}}{2}, \frac{z_2^{(k)} + z_3^{(k)}}{2}, \dots, \frac{z_n^{(k)} + z_1^{(k)}}{2} \right)$$

Alors $(z^{(k)})_{k \geq 0}$ converge vers $(g, \dots, g) \in \mathbb{C}^n$ où g = isobarycentre de $z_0, \dots, z_n$.

interp géométrique : P_0 = polygone à $n > 0$ sommets $(z_1, \dots, z_n)$

P_1 = polygone obtenu en prenant les milieux des côtés de P_0 puis ..

Alors les sommets de $(P_n)_n$ cv tous vers l'isobarycentre de P_0



démo $\forall k \geq 0$, $z^{(k+1)} = A z^{(k)}$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & 0 \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ 0 & & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (c'est une matrice circulante)

Donc / rec $x^{(k)} = A^k x^{(0)}$. On étudie donc les vps de A pour connaître la cv de $(A^k)_k$

On $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & & 0 \\ & \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & \\ 0 & & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\omega^i \right)$ par le lemme

$\in \mathbb{C}$

Donc $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=0}^{n-1} \left(X - \frac{1+\omega^i}{2} \right)$ est scindé à racines simples donc A est diagonalisable

et ses vp sont $\left\{ \frac{1+\omega^i}{2} \mid 0 \leq i \leq n-1 \right\}$

Donc $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}\left(\frac{1+\omega^i}{2}, \cdot\right)$

Or, $\forall i \neq 0$, $\left|\frac{1+\omega^i}{2}\right| < 1$ donc $\left(\frac{1+\omega^i}{2}\right)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

On en déduit que $A^k = PD^kP^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} PD_\infty P^{-1} = A_\infty$ avec $D_\infty = \text{diag}(1, 0, \dots 0)$

donc que $z^{(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} A_\infty z^{(0)}$ ce qui assure déjà la convergence de $(z^{(k)})_k$ vers $z^{(\infty)}$

De plus on sait que $\forall k$, $z^{(k+1)} = Az^{(k)}$ donc pour $k \longrightarrow +\infty$

on a $z^\infty = Az^\infty$ donc $z^\infty \in \text{Ker}(A - I_n)$ qui est de dim 1 car 1 vp d'ordre 1

Comme $(1, \dots, 1) \in \text{Ker}(A - I_n)$, $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}\{(1, \dots, 1)\}$

ce qui assure que $z^\infty = (z, \dots, z)$

Reste à montrer que $z =$ isobarycentre g de P_0

Or, par associativité des barycentres, $g =$ isobarycentre de P_1 $\quad (z_i^{(1)} = \text{isob } z_i \text{ et } z_{i+1 \text{ mod } n})$

puis par rec $g =$ isobarycentre de P_n $\forall n$.

Donc $\forall k \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} (z_i^{(k)} - g) = 0$

On fait tendre k vers $+\infty$ et on obtient $0 = n(z - g)$ donc $z = g$ et ça conclut