Transformation de Tseitin

(Th) Pour toute formule φ, il existe une formule $T(\varphi)$ en CNF de taille linéaire en celle de φ et telle que φ et $T(\varphi)$ sont équisatisfiables (⚠ pas équivalentes)

<u>démo</u> : • La taille d'1 formule est définie par le nb de connecteurs logiques $= n = |\varphi|$

• On note $SF(\varphi)$ l'ensemble des sous formules de φ (y compris φ)

On note V l'ensemble des propositions atomiques = variables

Pour toute $\psi \in SF(\varphi)$, on déf 1 nouvelle $\underbrace{\text{proposition atomique}}_{=\text{ variable}}$ a_ψ

(à laquelle on donne le sens " ψ est vraie")

• Comme $\{\neg, \vee\}$ est un Σ complet de connecteurs, on peut supposer que φ n'utilise que ces connecteurs. Si ce n'est pas le cas, on utilise $a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$; $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$ et $a \Leftrightarrow b \equiv \neg(\neg(\neg a \vee b) \vee \neg(\neg b \vee a))$ pour remplacer les $\wedge$, les $\Rightarrow$, les $\Leftrightarrow$ et obtenir 1 formule qui n'utilise que $\neg$ et $\vee$ et dont la taille est linéaire en celle de la formule de départ

(car /ex, on multiplie par 3 le nb de $\wedge$)

• On pose maintenant $T(\varphi) = a_\varphi \wedge \bigwedge_{\psi \in SF(\varphi) \setminus V} t(\psi)$ ↳ /hp formule qui contient que des $\neg$ et $\vee$

avec $t(\neg\psi) = a_{\neg\psi} \Leftrightarrow \neg a_\psi$

$= (a_\psi \vee a_{\neg\psi}) \wedge (\neg a_{\neg\psi} \vee \neg a_\psi)$ de taille $= 5$

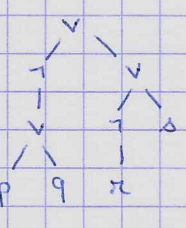
et $t(\psi_1 \vee \psi_2) = a_{\psi_1 \vee \psi_2} \Leftrightarrow a_{\psi_1} \vee a_{\psi_2}$

$= (a_{\psi_1\vee\psi_2} \vee \neg a_{\psi_1}) \wedge (a_{\psi_1\vee\psi_2} \vee \neg a_{\psi_2}) \wedge (\neg a_{\psi_1\vee\psi_2} \vee a_{\psi_1} \vee a_{\psi_2})$

de taille $= 9$

• Montrons que $|T(\varphi)|$ est linéaire en $|\varphi|$

On a $|SF(\varphi)| \leq 2|\varphi|$. En effet chaque connecteur logique donne lieu à au plus deux sous formules de φ. On peut s'en convaincre en construisant l'arbre de φ : ex:



On a vu que $\forall \psi \in SF(\varphi)$, $|t(\psi)| \leq 9$

donc $$|T(\varphi)| = \left| a_\varphi \wedge \bigwedge_{\psi \in SF(\varphi) \setminus V} t(\psi) \right| = 1 + \left| \bigwedge_{\psi \in SF(\varphi) \setminus V} t(\psi) \right|$$

car pour chaque $\psi \in SF(\varphi)$

$$\leq 1 + 10 \underbrace{|SF(\varphi) \setminus V|}_{\leq |SF(\varphi)|}$$

ya un $\wedge$ devant + au pire 9 connecteurs ds $t(\psi)$

$$\leq 20|\varphi| + 1$$

Donc la transformation est linéaire

- Montrons que φ et $T(\varphi)$ sont équisatisfiables.

($\Rightarrow$) Supposons que φ est sat : on a donc 1 valuation v tq $v(\varphi) = 1$

Construisons alors v' telle que $\forall \psi \in SF(\varphi), v'(a_\psi) = v(\psi)$

Comme $$T(\varphi) = a_\varphi \wedge \bigwedge_{\psi_1 \vee \psi_2 \in SF(\varphi)} (a_{\psi_1 \vee \psi_2} \Leftrightarrow a_{\psi_1} \vee a_{\psi_2}) \wedge \bigwedge_{\neg\psi \in SF(\varphi)} (a_{\neg\psi} \Leftrightarrow \neg a_\psi),$$

$= 1$

$v'(a_{\psi_1 \vee \psi_2} \Leftrightarrow a_{\psi_1} \vee a_{\psi_2})$
$= v(\psi_1 \vee \psi_2) \Leftrightarrow v(\psi_1) \vee v(\psi_2)$

on a bien $v'(T(\varphi)) = 1$

($\Leftarrow$) Supposons que $T(\varphi)$ soit sat : $\exists$ valuation v tq $v(T(\varphi)) = 1$

On pose v' tq $\forall p \in V$, $v'(p) = v(a_p)$. Alors $v'(\varphi) = 1$

car la variable associée à 1 sous formule est equiv à cette ss formule.

- Exemple : $\varphi = (p \vee \neg q) \vee (\neg p)$

$$T(\varphi) = a_\varphi \wedge t(\neg q) \wedge t(p \vee \neg q) \wedge t(\neg p) \wedge t((p \vee \neg q) \vee \neg p)$$

$$= a_\varphi \wedge (a_q \vee a_{\neg q}) \wedge (\neg a_q \vee \neg a_{\neg q})$$

$$\wedge (a_{p \vee \neg q} \vee \neg a_p) \wedge (a_{p \vee \neg q} \vee \neg a_{\neg q}) \wedge (\neg a_{p \vee \neg q} \vee a_p \vee a_{\neg q})$$

$$\wedge (a_p \vee a_{\neg p}) \wedge (\neg a_p \vee \neg a_{\neg p})$$

$$\wedge (a_{(p \vee \neg q) \vee \neg p} \vee \neg a_{p \vee \neg q}) \wedge (a_{(p \vee \neg q) \vee \neg p} \vee \neg a_{\neg p}) \wedge (\neg a_{(p \vee \neg q) \vee \neg p} \vee a_{p \vee \neg q} \vee a_{\neg p})$$

- Utilité : la CNF est utile pour décider linéairement la validité d'1 formule.