107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Cadre : On considère des groupes finis et des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Soit donc G un groupe fini d'élément neutre e.

I) Représentation d'un groupe fini

1) Définitions et premiers exemples [ULM] p144

Déf 1 : Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini. On appelle représentation linéaire sur $\mathbb{C}$ du groupe G tout morphisme $\rho : G \to GL(V)$. La dimension de V est appelée degré de la représentation.

Rq 2 Une représentation peut également être vue comme une action de G sur V par $g \cdot v = \rho(g)(v)$ $\forall g \in G, \forall v \in V$.

Déf 3 La représentation est dite fidèle si l'action est fidèle.

Exemple 4 1) La représentation triviale (de degré 1) de G est donnée par
$$\rho : G \to \mathbb{C}^*$$
$$g \mapsto 1$$

2) La représentation de permutation : Soit une action $G \to \mathfrak{S}_n$ on a une représentation sur le $\mathbb{C}$-ev V_ρ de base $(v_1, \dots, v_n)$ en posant $g \cdot v_i = v_{\rho(g)(i)}$. Cette représentation est de degré n.

3) La représentation régulière : Si G est d'ordre n alors comme G agit sur lui même il y a donc un morphisme $\rho : G \to \mathfrak{S}_n$ donc d'après 2) il y a une représentation associée. Cette représentation est fidèle.

[COL] p235-236 4) Representation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: une représentation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la donnée d'un $\mathbb{C}$-ev V est d'un élément $u \in GL(V)$ tel que $u^n = 1$.

Déf 5 1) Soient G un groupe et (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) 2 représentations de G. On appelle morphisme de représentation entre V_1 et V_2 tout $\varphi \in Hom(V_1, V_2)$ tq $\varphi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \varphi$ $\forall g \in G$. L'ensemble des morphismes de représentation est noté $Hom_G(V_1, V_2)$

2) (V_1, ρ_1), (V_2, ρ_2) sont dits équivalents s'il existe un morphisme de représentation bijectif.

Rq 6 : Si (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) sont équivalents alors ces 2 représentations ont le même degré.

[ULM] p147

2) Sous représentations et opérations sur les représentations

Déf 7 Un sous espace $W \subset V$ est appelé sous représentation de G si $g \cdot w = \rho(g)(w) \in W$ $\forall g \in G, \forall w \in W$

Ex 8 - $\mathbb{C}(1, \dots, 1)$ est une sous représentation de la représentation de permutation isomorphe à la représentation triviale

- Si $\varphi \in Hom_G(V_1, V_2)$. Alors $\ker(\varphi)$ est une sous-représentation de V_1 et $Im(\varphi)$ est une sous représentation de V_2.

Déf / Prop 9 : Soient (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) 2 représentations de G alors on peut définir les représentations suivantes :

- $V_1 \oplus V_2$ $\rho_{V_1 \oplus V_2}(g)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(g)(v_1) \oplus \rho_2(g)(v_2)$
- $Hom(V_1, V_2)$, pour $f \in Hom(V_1, V_2)$,
$\rho_{Hom(V_1,V_2)}(g)(f) = \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1})$

3) Représentations irréductibles. [ULM] p147

Déf 10 1) Une représentation V est dite irréductible (ou simple) si V et $\{0\}$ sont distincts et sont les seules sous représentations de G

2) Elle est dite réductible si elle n'est pas irréductible

3) Elle est dite complètement réductible si toute sous-représentation W de V admet un supplémentaire stable.

Ex 11 Toute représentation de degré 1 est irréductible

Prop / Déf 12 1) Soit V une représentation. L'ensemble des points fixes $V^G = \{v \in V, g \cdot v = v\}$ de V est une sous-représentation de V.

2) Si V_1 et V_2 sont des représentations alors
$Hom_G(V_1, V_2) = Hom(V_1, V_2)^G$

Thm 13 (Maschke) Si G est un groupe fini, alors toute sous représentation admet un supplémentaire stable.

Corollaire 14 Toute représentation de G est somme directe de représentation irréductible. [PR] p42

Thm 15 (Lemme de Schur) : Soient G un groupe, V_1 et V_2 deux représentations irréductibles, $\phi : V_1 \to V_2$ un morphisme de représentation. Alors,

1) Si ϕ est non nul, alors ϕ est un isomorphisme de G-modules

2) Si V_1 et V_2 sont isomorphes alors $\phi = \lambda\, id$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Corollaire 15 (avant Schur) Un sous groupe abélien fini A de $GL(n, \mathbb{C})$ peut être mis simultanément sous forme diagonale.

II) Théorie des caractères

1) Définitions et premières propriétés. [ULM] p150

Déf 17 Soit G un groupe. Une fonction centrale sur G est une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ qui est constante sur les classes de conjugaison.

Rq 18 Les fonctions centrales forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Déf 19 Soit G un groupe fini, (V, ρ) une représentation de degré m. Le caractère de la représentation est la fonction
$$\chi : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g))$$
. Le degré du caractère est le degré de la représentation.

Application 20 : Théorème de Molien [LEI] p95

$\forall k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'espace des polynômes homogènes de degré k de $A[X_1 .. X_n]$. Soit G un groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Soit une action de G sur les A_k (ie une représentation de G). On note $a_k(G) = \dim A_k^G$. Alors $\sum_{k \geq 0} a_k(G) X^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I - Xg)}$

Rq 21 - $\deg(\chi) = \chi(e)$
- deux représentations isomorphes ont même caractères.
- un caractère est une fonction centrale.

Prop 22 Le caractère est un morphisme de groupe ssi il est de degré 1

Exemple 23 1) Soit ρ_P la représentation de permutation et χ_P le caractère associé alors $\chi_P(g)$ est le nombre de points fixes de $\rho(g)$.

2) Le caractère χ_R de la représentation régulière est $\chi_R(g) = 0$ si $g \neq e$, $\chi_R(e) = |G|$.

Prop 24 Soient G un groupe fini et V et W 2 représentations de G. Les caractères vérifient les propriétés suivantes :

1) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$
2) $\chi_{W^*} = \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$
3) $\chi_{Hom(V,W)} = \overline{\chi_V} \cdot \chi_W$

DVP

[ULM] p152 2) Caractère irréductible et orthogonalité

Déf 25 Soit G un groupe fini. Le caractère χ d'une représentation irréductible V est un caractère irréductible.

Déf 26 Soient G un groupe fini et Φ et Ψ deux fonctions centrales sur G. Alors la formule
$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\Phi(g)} \Psi(g)$$
définit un produit scalaire hermitien sur le $\mathbb{C}$-ev des fonctions centrales de G

Thm 27 Les caractères irréductibles de G forment une base orthonormée de cet espace (Frobenius) $\boxed{DVP}$

Thm 28 1) Tout caractère irréductible χ de G apparait $\deg(\chi)$ fois dans le caractère de la représentation régulière.

2) Le nombre de caractères irréductibles de G est égal au nombre m de classes de conjugaison de G.

3) L'ordre du groupe est donné par $|G| = \sum_{i=1}^{m} \chi(e)^2$ où $\chi_1, \dots, \chi_m$ sont les caractères irréductibles distincts de G.

3) Table de caractères d'un groupe fini

Déf 29 La table de caractère de G est définie comme étant le tableau qui donne les valeurs des caractères irréductibles sur les classes de conjugaisons de G.

Rq 30 La table de caractère est carrée.

Prop 31 Si on note $\chi_\lambda(C_1)$ la valeur du caractère χ_λ sur la classe de conjugaison C_1, on a :
$$\sum_{\chi_\lambda \text{ irred}} \chi_\lambda(C_1) \chi_\lambda(C_2) = \begin{cases} \frac{|G|}{|C_1|} & \text{si } C_1 = C_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
[PEY] p226

Rq 32 : Si $C_1 = (e)$ on obtient $\sum (\deg \chi) \chi(C_2) = 0$ si $C_2 \neq e$

Ex 33

$\mathfrak{S}_3$:	1	(1,2)	(1,2,3)
Id	1	1	1
χ_ε	1	-1	1
χ_2	2	0	-1

[P-R] p46

$\boxed{DVP}$

$\mathfrak{S}_4$	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_3'	3	-1	0	1	-1

III) Représentations et théorie des groupes

1) Résolubilité [P-R] p66

Déf 34 Un groupe G est dit résoluble s'il existe un entier positif k tel que $G^{(k)} = 1$. Où $G^{(k)}$ est le groupe dérivé $k$ième de G.

Thm 35 Soient p et q deux nombres premiers distincts et α et β deux entiers positifs ou nul. Tout groupe fini d'ordre $p^{\alpha} q^{\beta}$ est résoluble.

Appli 36 $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{A}_4$ sont résolubles.

2) Caractères d'un groupe abélien [ULM] p157

Prop 37 Soit G un groupe fini. Alors si G est abélien, alors les caractères irréductibles de G sont tous de degré 1 et le nombre de caractères irréductibles distincts de G est l'ordre de G.

Ex 38 Si G est un groupe cyclique engendré par $g \in G$ alors les caractères irréductibles de G sont les χ_j tels que $\chi_j(g) = \omega_n^j$ pour $j \in [\![0; n-1]\!]$ avec $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ [PEY] p4

[PEY] p2 3) Dual et bidual d'un groupe abélien.

Rappel G est abélien ssi tout caractère irréductible de G est de degré 1.

Déf 39 On note $\hat{G}$ l'ensemble des caractères irréductibles de G, qu'on appelle le dual de G.

Prop 40 Soit G un groupe fini abélien de cardinal $|G| = n$. Les éléments de $\hat{G}$ sont en fait les morphismes de G dans le groupe des racines $n$ième de l'unité,

$$\mathcal{U}_n = \{ \exp(\tfrac{2ik\pi}{n}) \mid 0 \leq k < n \}$$

p6 Prop 41 (Prolongement de caractères). Soit G un groupe fini commutatif. $H \subset G$ un sous groupe. Tout caractère χ de H peut être prolongé en un caractère de G

Thm 42 (Thm d'isomorphisme). Soit G un groupe fini commutatif. Alors $\hat{G}$ est isomorphe à G. En particulier G et $\hat{G}$ ont même ordre

Déf 43 Nous avons construit le dual $\hat{G}$ d'un groupe fini commutatif G, qui à son tour est un groupe fini commutatif. On peut lui associer son dual que l'on notera $\hat{\hat{G}}$ le bidual de G.

Thm 44 : (Isomorphisme canonique) On a un isomorphisme canonique $G \simeq \hat{\hat{G}}$ qui est donné par l'application

$$\phi : \begin{cases} G \longrightarrow \hat{\hat{G}} \\ g \longmapsto (\phi(g) : \chi \longmapsto \chi(g)) \end{cases}$$

Références :

[ULM] : Felix Ulmer Théorie des groupes pour presque tout

[P-R] : le petit rouge ie. G. Rauch : Les groupes finis et leurs représentations

[PEY] : G. Peyré L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.

[COL] : P. Colmez : Eléments d'analyse et d'algèbre.

[LEI] : Leichtnam : Algèbre 1 (Molien)