

I) Théorie de la dimension

1) Familles génératrices, libres, bases

Def 1: Une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dite génératrice si $E = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$, i.e. $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$.

• Elle est dite libre si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.
Sinon elle dite liée.

• C'est une base si elle est libre et génératrice, i.e. $\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$.

Ex 2: $\{(1,0), (0,1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

* Dans $\mathbb{R}^3, (1,2,1), (-1,3,1)$ et $(-1,13,5)$ sont liés.

* $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

* La famille $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où E_{ij} est la matrice dont le seul coefficient non nul est le coefficient d'indices i, j , égal à 1, est une base de $M_n(\mathbb{K})$.

Prop 3: Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Prop 4: Une famille est une base ssi elle est libre de cardinal maximal ssi elle est génératrice de cardinal minimal.

2) Espaces vectoriels de dimension finie

Def 5: Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une partie génératrice finie.

Ex 6: $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_n[X], M_n(\mathbb{K})$ sont de dimension finie.

Thm 7: Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie et G une famille génératrice finie. Soit $L \subset G$ une famille libre. Alors il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$.

Thm 8: Soit $E \neq \{0\}$ un espace vectoriel de dimension finie.

- De toute famille génératrice on peut extraire une base.
- Thm de la base incomplète: toute famille libre peut être complétée en une base.

Ex 9: Détermination d'une base par l'algorithme de Gauss.
Soit $\{v_1, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs et A la matrice engendrée par ces vecteurs. Soit A' une matrice réduite échelonnée de A . Alors les lignes non nulles de A' forment une base de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Ex: une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1,1,0,-1), (-1,1,1,0)$ et $(0,2,1,-1)$ est $((1,1,0,-1), (0,2,1,-1))$.

Lemme 10: Dans un espace vectoriel engendré par n éléments, toute famille contenant plus de n éléments est liée.

Thm 11: Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Def 12: Ce nombre est appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$, et noté $\dim_{\mathbb{K}} E$ ou $\dim E$.

Ex 13: $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n, \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] = n+1, \dim_{\mathbb{K}} M_n(\mathbb{K}) = n^2$.

Cor 14: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

- Toute famille ayant moins de n éléments ne peut être génératrice. Toute famille ayant plus de n éléments est liée.
- Toute famille génératrice ou libre ayant n éléments est une base.

Ex 15: $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1) \dots (X-n+1))$ est libre et de cardinal $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

App 16: Démonstrations par récurrence sur la dimension:

Réduction des endomorphismes normaux:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , tel que $f^* \circ f = f \circ f^*$. Il existe une base orthonormée B de E telle que $\text{Mat}_B f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \lambda_i \in \mathbb{R}, \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}, a_i, b_i \in \mathbb{R}$

Prop 17: Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dots + \dim_{\mathbb{K}} E_p$.

3) Sous-espace vectoriel

Prop 18: Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F est de dimension finie et:

- $\dim_{\mathbb{K}} F \leq \dim_{\mathbb{K}} E$
- $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow E = F$

Def 19: Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E .

- On appelle somme de E_1 et E_2 le sous-espace de E défini par $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$.
- Soit $E = E_1 + E_2$. On dit que E est somme directe de E_1 et E_2 si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. On note $E = E_1 \oplus E_2$.
- E_1 et E_2 sont dits supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$.

Prop 20: $E = E_1 \oplus E_2$ ssi pour toute bases B_1 de E_1 et B_2 de E_2 , $\{B_1, B_2\}$ est une base de E .

Cor 21: Tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire. Il n'est pas unique mais si E est de dimension finie, ils ont tous même dimension.

Thm 22: Soit E de dimension finie.

$E = E_1 \oplus E_2$ ssi $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$.

Ex 23: Dans $\mathbb{R}^3$ soit Π un plan vectoriel et $v \notin \Pi$. Alors $\mathbb{R}^3 = \Pi \oplus \text{Vect}(v)$.

Ex 24: $\mathcal{U}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Prop 25: Formule de Grassmann

$\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

4) Dimension et applications linéaires

Prop 26: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et $\{v_i\}_{i \in I} \subset E$, E un espace vectoriel.

- Si $\{v_i\}$ est libre et f injective, alors $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est libre.
- Si $\{v_i\}$ est génératrice et f surjective, alors $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est génératrice.

En particulier, si f est bijective, l'image d'une base est une base.

Prop 27: Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

App 28: $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

App 29: Soit $t \mapsto A(t) \in \mathcal{U}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue.

L'ensemble des solutions de l'équation $Y'(t) = A(t)Y(t)$ est un espace vectoriel de dimension n .

II Rang et applications linéaires

1) Définitions et théorème du rang

Def 30: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$. $f(E)$ est un sous-espace de E' , appelé image de f , noté $\text{Im} f$. Sa dimension est appelée rang de f . On note $\text{rg} f = \dim(\text{Im} f)$.

On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace qu'ils engendrent.

On appelle rang de $A \in \mathcal{M}_p, n(\mathbb{K})$ le rang de la famille des vecteurs colonnes de A .

Prop 31: Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si A est la matrice de f dans des bases quelconques, alors $\text{rg} f = \text{rg} A$.

Cor 32: On en déduit que deux matrices semblables ont même rang.

Prop 33: Soient trois applications linéaires $u: E_1 \rightarrow E_2$, $f: E_2 \rightarrow E_3$, $v: E_3 \rightarrow E_4$. Si u et v sont des isomorphismes alors:

- * $f \circ u$ est de rang fini ssi f est de rang fini. Alors $\text{rg}(f \circ u) = \text{rg} f$.
- * $v \circ f$ est de rang fini ssi f est de rang fini. Alors $\text{rg}(v \circ f) = \text{rg} f$.

Thm 34: Théorème du rang

Soient E, E' deux espaces vectoriels de dimension finie et $f: E \rightarrow E'$ une application linéaire. Alors:

$\dim E = \text{rg} f + \dim(\ker f)$.

App 35: Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur. Alors $E = \ker p \oplus \text{Im} p$.

Cor 36: Soit $f \in \mathcal{L}(E, E')$ avec E, E' de même dimension finie.

Alors f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective.

App 37: Polynômes interpolateur de Lagrange

Soient $p \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

$\varphi: \mathbb{K}_p[X] \rightarrow \mathbb{K}^p$ est un isomorphisme. Donc il existe

un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_p[X]$ tel que $\forall i \in [1, p], P(a_i) = b_i$, pour $b_1, \dots, b_p \in \mathbb{K}$.

2) Caractérisation et calcul effectif du rang

Prop 38: Soit $A \in \mathcal{M}_p, q(\mathbb{K})$. Si $\text{rg} A \geq 1$, alors A est équivalente à $J_\pi = \begin{pmatrix} I_\pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\pi = \text{rg} A$.

Cor 39: $\text{rg}(A) = \text{rg}(^t A)$.

Con 40: Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.

Prop 41: Le rang de A est le plus grand des ordres des matrices carrées inversibles extraites de A.

Prop 42: Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang.

App 43: Calcul du rang par l'algorithme de Gauss.

Ex: $\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 2$.

3) Formes linéaires

Def 44: Une forme linéaire sur E est une application linéaire $w: E \rightarrow \mathbb{K}$. $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté E^* et appelé espace dual de E.

Ex 45: La différentielle d'une application à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire.

App 46: Théorème des extrema liés.

Soient $f, g_1, \dots, g_r: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\Gamma = \{x \in U, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$.

Si $f|_{\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $(Dg_i(a))_{1 \leq i \leq r}$ est libre, alors: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}, Df(a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i Dg_i(a)$.

Prop 47: Soit E de dimension finie n. Si $w \in E^*, w \neq 0$, alors: $\dim(\ker w) = n - 1$.

On dit que $\ker w$ est un hyperplan de E, déterminé par w.

Ex 48: $\dim \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{Tr}(A) = 0\} = n^2 - 1$.

Prop 49: Si E est de dimension finie, alors $\dim E = \dim E^*$.
Donc E et E^* sont isomorphes.

Thm/Def 50: Soit E de dimension finie n et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E.
Alors $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, où $\theta_i(e_k) = \delta_{ik}$, est une base de E^* .
Elle est dite base duale de $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Ex 51: Soient $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 0, -1), e_3 = (0, 1, 1)$. $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Sa base duale est $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ avec $\theta_1(x) = x_1 - x_2 + x_3; \theta_2(x) = x_2 - x_3; \theta_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$.

Prop 52: E^{**} est canoniquement isomorphe à E en dimension finie: $\Phi: E \rightarrow E^{**}, \text{ où } \Phi x: E^* \rightarrow \mathbb{K}, \text{ est un isomorphisme.}$
 $x \mapsto \Phi x, \quad w \mapsto w(x)$

III) Extension de corps et dimension

Def 53: Soit k un corps. On appelle extension de k tout corps K tel qu'il existe un morphisme de corps j de k dans K.

On appelle degré de l'extension K de k, noté $[K:k]$, la dimension de K en tant que k-espace vectoriel.

Ex 54: $[k:k] = 1 \Leftrightarrow k = k$.

• $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$ de degré 2.

• $\mathbb{F}_p^n$ est une extension de $\mathbb{F}_p$ de degré n.

Thm 55: Thm de la base télescopique.

Soient k un corps, k' un sous-corps de K, E un k-espace vectoriel. Soient $(e_i)_{i \in I}$ une base de E en tant que k-ev et $(x_j)_{j \in J}$ une base de K en tant que k'-ev. Alors $(x_j e_i)_{i \in I, j \in J}$ est une base de E en tant que k'-ev.

Con 56: Avec les notations précédentes, il y a équivalence entre:

- (i) E est un k-espace vectoriel de dimension finie.
 - (ii) E est un k'-espace vectoriel de dimension finie et k est un k'-espace vectoriel de dimension finie.
- On a alors: $\dim_{k'} E = \dim_k E \times \dim_{k'} k$.

Def 57: Soit K une extension de k. a $\in K$ est dit algébrique sur k si il existe $P \in k[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(a) = 0$.
On appelle polynôme minimal de a l'unique polynôme unitaire $\Pi_a \in k[X]$ qui engendre l'idéal des polynômes de $k[X]$ annihilant a.

Thm 58: a $\in K$ est algébrique sur k ssi $k[a]$ est de dimension finie. On a alors $[k[a]:k] = \deg \Pi_a$.

Ex 59: Soit d $\in \mathbb{N}$ avec $d \neq 0$.
 $\mathbb{Q}(\sqrt[d]{a})$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension $[\mathbb{Q}(\sqrt[d]{a}):\mathbb{Q}] = d$.

[GRI]: Grifone, Algèbre linéaire, 4^e édition

[GOOAn]: Gourdon, Analyse, 2^e édition

[GOUAI]: Gourdon, Algèbre, 2^e édition

[CA]: Beck, Talick, Peyré, Objectif agrégation, 2^e édition

[GOZ]: Goroard, Théorie de Galois.

[GOZ] p 24-22

[GOZ] p 30-33

[GOUAI] p 122

[GRI] p 82

[DVP] [GOUAI] p 317

[GRI] p 82-86