

Cadre : E un K -espace vectoriel de dim finie n avec K un corps
On identifie $\mathcal{L}(E)$ avec $M_n(K)$

I. Définitions

1) Éléments propres ([GOU] p161-162)

Def 1 : On dit que $\lambda \in K$ est une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. On dit alors que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ .
On appelle spectre de f l'ensemble des valeurs propres de f .

Def 2 : Soit $\lambda \in \text{Spec}(f)$. L'ensemble $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\} = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace propre de f associé à λ .

Rmq : E_λ est stable par f pour tout $\lambda \in \text{Spec}(f)$

Ex 3 : Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ on a $\text{Spec}(A) = \{2, 3\}$, $E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Th 4 : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres deux à deux distinctes de f alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

Ex 5 : $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotation d'angle θ et de centre $O_{\mathbb{R}^2}$. Si $\theta \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, alors f n'a pas de vecteur propre et $\text{Sp}(f) = \emptyset$.

2) Polynôme minimal ([GOU] p174, 176)

Def 6 : Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p \in K[X]$. On définit les fonctions polynomiales sur $\mathcal{L}(E)$ par $\forall f \in \mathcal{L}(E)$:

$$P(f) = a_0 \text{Id}_E + a_1 f + \dots + a_p f^p \in \mathcal{L}(E)$$

On note $K[f] = \{P(f) \mid P \in K[X]\}$

Rmq : $K[f]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$

Def/Prop 7 : On note $I = \{P \in K[X] \mid P(f) = 0\}$ l'idéal des polynômes annulateurs de f . C'est un idéal non réduit à $\{0\}$.
On note Π_f l'unique polynôme unitaire qui engendre I ($K[X]$ est principal) et on l'appelle polynôme minimal de f .

Prop 8 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$ tel que $P(f) = 0$. Si λ est valeur propre de f alors $P(\lambda) = 0$.

3) Polynôme caractéristique ([GOU] p162)

Def 9 : Soit $A \in M_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $K[X]$ défini par $\chi_A = \det(A - X \text{Id}_n)$.

Ex 10 : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\chi_M = -(X-1)(X-2)(X+4)$

Rmq : Une matrice a même polynôme caractéristique que sa transposée. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Prop 11 : λ est valeur propre de f ssi $\chi_f(\lambda) = 0$

Prop 12 : Si K est algébriquement clos alors $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Sp}_K(f) \neq \emptyset$

Th 13 : Cayley-Hamilton : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ alors $\chi_f(f) = 0$

Rmq : $\Pi_f \mid \chi_f$ par Cayley-Hamilton

II. Diagonalisabilité

([GOU] p163)

1) Définition d'un endomorphisme diagonalisable

Def 14 : Soit $A \in M_n(K)$. On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale.

Rmq : Un endomorphisme est diagonalisable ssi sa matrice dans une base quelconque de E est diagonalisable.

2) Critère de diagonalisabilité ([GRIF] p179, 156, 164, 166, 183)

Lem 15 : Lemme des noyaux : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $Q = Q_1 \dots Q_p$ un polynôme factorisé en produit de polynômes 2 à 2 premiers entre eux. Si $Q(f) = 0$ alors on a :

$$E = \text{Ker } Q_1(f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } Q_p(f)$$

Thm 16 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

- 1) f est diagonalisable
- 2) il existe une base de E formée de vecteurs propres
- 3) E est somme directe des espaces propres :

$$E = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

$$4) \dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p})$$

$$5) \chi_f \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X] \text{ avec } \forall \lambda \in \text{Sp}(f), \\ m_\lambda = \dim(E_\lambda(f)) \text{ où } m_\lambda \text{ multiplicité de } \lambda \text{ dans } \chi_f$$

6) Il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

$$7) \Pi_f \text{ est scindé à racines simples dans } \mathbb{K}(X), \text{ i.e.} \\ \Pi_f = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i) \text{ où } \text{Spec}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$$

Ex 16 : On reprend l'ex 9, $\chi_n = -(X-1)(X-2)(X-4)$ scindé à racines simple donc diagonalisable d'où $M \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Appli 17 : Résolution d'un système de suites récurrentes par le calcul de la puissance d'une matrice

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

$$\text{donne } u_n = 3 \times 2^{n-1} - 4 \times 3^n \text{ et } v_n = -3 \times 2^n + 4 \times 3^n$$

Prop 18 : Résolution dans un corps fini

Sur $\mathbb{F}_p$, f diagonalisable $\Leftrightarrow f^p = f$

3) Conséquences topologiques ([OA] p199)

Prop 19 : Soit T_n = matrices trigonalisables, D_n matrices diagonalisables et C_n matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$

On a $C_n(\mathbb{K}) \subset D_n(\mathbb{K}) \subset T_n(\mathbb{K}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus $\overline{C_n(\mathbb{K})} = T_n(\mathbb{K})$ et $D_n^0(\mathbb{K}) = C_n(\mathbb{K})$

Prop 20 : $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

Contre-ex 21 : $D_n(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$

Application 22 : $\det(\exp(A)) = \exp(\text{tr}(A))$, $\forall A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

III. Familles d'endomorphismes diagonalisables

1) Codiagonalisabilité ([GOU] p 166-167, [OA] p 205)

Th 23 : Si f et $g \in \mathcal{L}(E)$ sont diagonalisables et commutent alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g . On dit alors que f et g sont codiagonalisables.

Version matricielle : Soient $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables telles que $AB = BA$ alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

Appli 24 : Pour $m \neq n$, $GL_n(\mathbb{R}) \neq GL_m(\mathbb{R})$

2) Endomorphismes normaux ([GOU] p258, 257, 260, 256, 244)

Def 25 Soit E hermitien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est normal si u et u^* commutent.

Th 26 Si E est hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

- 1) u est normal
- 2) u se diagonalise dans une base orthonormale de E
- 3) u et u^* se diagonalisent dans une base orthonormale commune.

Cor 27 : Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Alors M est normale ssi $\exists P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire ($tP P = I_n$) telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale

Ex 28 : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est normale donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car $R_\theta tR_\theta = I_2 = tR_\theta R_\theta$ mais R_θ est non-diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Contre-exemple avec E euclidien

Th 29 : E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ endomorphisme normal alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & \tau_1 & \dots & \tau_s \end{pmatrix}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ $\begin{matrix} i \in \{1, \dots, r\} \\ j \in \{1, \dots, s\} \end{matrix}$

[GOU] p 186

DEV
[GOU] p 260

[GRIF]
p109

Cas particulier : Dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_i = \pm 1$ et $T_j = \begin{pmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j \\ \sin \theta_j & \cos \theta_j \end{pmatrix}$
d'où $T_j \in \mathcal{R}_2$. C'est la réduction des isométries.

Thm 30 : Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint ($f^* = f$) alors il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour f et de plus ses valeurs propres sont réelles.

Cor 31 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. Alors il existe une matrice C orthogonale telle que $C^{-1}MC = C^*MC = D$ avec D diagonale réelle.

IV. Décomposition de Dunford ([GOU] p 195)

Thm 32 : Décomposition de Dunford

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_f soit scindé sur K . Il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que

- 1) d est diagonalisable
- 2) n est nilpotent
- 3) $f = d + n$
- 4) d et n commutent

De plus, d et n sont des polynômes en f .

Ex 33 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La décomposition de Dunford de A est $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Appli 34 : Application au cas de l'exponentielle
$$e^A = e^D e^N$$

Appli 35 : Résolution d'un système différentiel linéaire

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad X(0) = X_0$$

La solution est donnée par $X(t) = e^{tA} X_0 = e^{tD} e^{tN} X_0$
$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad e^{tN} = \sum_{k=0}^2 \frac{t^k N^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & t & -t+2t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve
$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} x_0 + t e^{3t} y_0 + (2t^2 - t) e^{3t} z_0 \\ y(t) = e^{3t} y_0 + 2t e^{3t} z_0 \\ z(t) = e^{3t} z_0 \end{cases}$$

REFERENCES

- [GOU] : Gourdon "Algèbre" 2^{ème} édition
- [GRIF] : Grifone "Algèbre linéaire" 4^e édition
- [OAJ] : "Objectif Agrégation" Beck 2^e édition