

(H₂G₂ p207 pour pas mal de truc)

EXPONENTIELLE DE MATRICES. APPLICATIONS

Cadre: $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\mathcal{M}_n(K)$ est muni de la norme $\| \cdot \|$ associée à la norme usuelle.

I. GENERALITÉS

1. Définitions et premières propriétés

Def 1 On pose $\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. [DEF] p199

Rq 2 • $\exp(A)$ est un polynôme en A . [Gau] p189

• on a $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$ ce qui montre que e^A est bien définie. [DEF] p199

Prop 3 L'application $\mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ est continue.

$$A \mapsto \exp(A) \quad [\text{Gau}] \text{ p184}$$

Ex 4 Pour une matrice diagonale par blocs $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ on a $e^T = \begin{pmatrix} e^{T_1} & 0 \\ 0 & e^{T_2} \end{pmatrix}$ [DEF] p200

Ex 5 Si N est nilpotente d'ordre p , $e^N = I + N + \dots + \frac{1}{(p-1)!} N^{p-1}$

Prop 6 Si $AB = BA$, $e^{A+B} = e^A e^B$ [DEF] p199

C-ex 7 pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $e^{A+B} \neq e^A e^B$ [DEF] p200

Cor 8 e^A est une matrice inversible, d'inverse e^{-A} .

Cor 9 $\forall P \in GL_n(K)$, $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}(\exp A)P$.

App 10 Si $K = \mathbb{R}$ et $e^A = e^B$ alors $A = B$ [FGN] J exo 232 au 4.22

Prop 11 $\exp(tA) = t(\exp A)$ [FGN] J exo 23 au [ITT] p61

Prop 12 $\det(\exp A) = \exp(\text{tr } A)$ [Gau] p186 ou [DEF] p201

App 13 Si $\pi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'exponentielle d'une matrice réelle alors $\det \pi > 0$. Réciproque fautive cf $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

App 14 $\exp: (CA) \rightarrow (CA)^*$ est un morphisme de groupes [ITT] p69

2. Calcul de l'exponentielle

Thm 15 On suppose que λ_A scinde sur K . Alors il existe un unique couple $(D, N) \in \mathcal{M}_n(K)$ tq D diagonalisable, N nilpotente, $A = D + N$ et $DN = ND$. De plus D et N sont des poly en A .

(Décomposition de Dunford)

App 16 application au calcul de l'exponentielle : on a

$$e^A = e^D e^N \quad [\text{Gau}] \text{ p197}$$

$$\text{Ex 17 } \exp \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 10e^2 - 6e^3 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & 9e^2 - 6e^3 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 11e^2 - 6e^3 \end{pmatrix}$$

C-ex 18 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas la décomposition de Dunford de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ [GA] p164

Prop 19 En gardant les notations du thm 15, la décomp de Dunford de $\exp(A)$ est $\exp(D) - \exp(D)(Id - \exp(N))$

App 20 A diagonalisable $\Leftrightarrow \exp(A)$ diagonalisable [DVT]

App 21 $\exp(A) = \alpha \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \text{Rt}(\alpha)$ [GA] p215 ou [FGN] 231

App 23 $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA} = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \text{Sp}(A) \text{ Re}(\lambda) < 0$. [Gau] p200

Thm 24 (Décomposition de Jordan) Si λ_A scinde, J_P inversible et B de la forme $B = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$

$$\text{et } J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ tq } A = P^{-1}BP.$$

App 25 application au calcul de l'exponentielle [GRI] p375

II. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

1. Différentiabilité et inversion locale [ITT] si non précise

Thm 26 $\exp: \mathcal{M}_n(K) \rightarrow GL_n(K)$ est une application de classe C^1 (même analytique) et sa différentielle en 0 est Id. p59 ou [SCP] p352

Prop 27 Elle réalise donc un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans $\mathcal{M}_n(K)$ et un voisinage de Id dans $GL_n(K)$. p59 [SCP] p354

App 28 Différentielle de l'exponentielle [DVT] p80 ou [ATT] p109

App 29 $GL_n(K)$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petits p59 [SCP] p354

Logarithme matriciel. [SZP] p356 ou [TT] p60

Def 30 Pour $A \in \mathcal{B}(\text{Id}, 1)$ on appelle $\log A$ la somme de la série normalement convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (A - \text{Id})^n$.

Rq il peut également être défini sur les matrices unipotentes.

Prop 31 $\forall A \in \mathcal{B}(\text{Id}, 1)$ $\exp(\log A) = A$.

Prop 32 $\exp$ réalise un homomorphisme entre $\mathcal{C}^1$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{C}^1$ l'ensemble des matrices unipotentes. Son inverse est l'application $\log$.
 $\mathcal{C}^1 \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{C}^1$

$$n \mapsto \exp(n) \mapsto \exp(n - \text{Id}).$$

Prop 33 $\exp$ induit un homomorphisme de $\mathcal{J}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{J}_n^{++}(\mathbb{R})$. p61 ou [FGN] exo 4.23

Rq. de même de $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$. p62

App 34 Décomposition polaire $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq \text{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$
 $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \text{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$

2. Surjectivité.

On a vu en app 10 que $\exp$ est injective dans $\mathbb{R}$. Elle ne l'est pas dans $\mathbb{C}$ par app 21.

Dans $\mathbb{C}$

Prop 35 $\exp: \mathcal{O}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

App 36 ($\forall A \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \exists B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{C}) B^p = A$) $\forall p \geq 2$.

App 37 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Dans $\mathbb{R}$

Prop 38 Il n'y a pas surjectivité. En effet $\exp(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \{A^2 \mid A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$

Prop 39 $\exp: \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_n(\mathbb{R})$ est surjective.

C-ex $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent par $\exp$ dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

III. APPLICATIONS

1. Systèmes différentiels à coefficients constants.

Prop 40 Pour $t \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{dt} (\exp tA) = A \exp tA = \exp tA A$
ou [GR1] p376

Prop 41 Une solution de $\frac{dY}{dt} = AY + B(t)$ avec $Y(t_0) = Y_0$
est $Y(t) = e^{(t-t_0)A} Y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-u)A} B(u) du$ [GR1] p376

Ex 42 Soit à résoudre $\frac{dX}{dt} = AX$ où $A = \begin{pmatrix} b & a \\ a & -b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$

et $X(t) = X_0 \in \mathbb{F} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$

la solution est $X(t) = e^{(b-a)t} X_0$ [GR1] p377

Def 43 'Stabilité de $\mathbb{R}^n$ ' est $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel $f(0, x) = 0$

la solution nulle de $Y'(t) = f(t, Y(t))$ est dite stable

si $\forall \epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$ $\|Y_0\| \leq \eta$, la solution

de $Y'(t) = f(t, Y(t))$ passant par Y_0 est $= 0$ est globale

et tel $\forall t > 0$ $\|Y(t)\| \leq \epsilon$. Elle est asymptotiquement

stable si elle est stable et si $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 0$.

Thm 44 Soit $\Pi \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. la solution nulle de $Y' = \Pi Y$

est stable si $\forall \lambda \in \text{Sp}(\Pi)$ $\text{Re}(\lambda) \leq 0$ et que les valeurs

propres de multiplicité > 1 dans Π sont de partie réelle

< 0 . Elle est asymptotiquement stable si $\forall \lambda \in \text{Sp}(\Pi)$

$\text{Re}(\lambda) < 0$.

2. Groupes à un paramètre [FGN] si non prouv.

Prop 45 Les morphismes de groupes dérivables de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\text{GL}_n(\mathbb{C}), \times)$ sont les $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA}$ avec A matrice quelconque de $\mathcal{O}_n(\mathbb{C})$.

Prop 46 Les morphismes de groupes continus de

ou [CA] p174
ou [FGN] exo 4.24



p62

[TAX] p49

[Gou] p202

[TAX] p49

ou [SZP] p359

[SZP] p365

ou [FGN] AR3

excl. 36

[DEF] p202

ou [GR1] p376

[DEF] p202

ou [SZP] p359

[SZP] p366

ou [DEF] p281

[SZP] p360

ou [DEF] p284

ou 4.26

ou 3.11

$(\mathbb{R}, +)$ dans $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$ sont les $t \mapsto e^{tA}$ avec A matrice quadratique.

Prop 4.7 Les morphismes de groupes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(SL_2(\mathbb{R}), \times)$ sont les $t \mapsto e^{tA}$ où $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est tq $\text{tr}(A) = 0$.

Prop 4.8 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est tq $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$
 $\Rightarrow \exists (P, A) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})^2 / P^2 = P$ et $\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(t) = P \exp(tA)$

3. Etudes d'ensembles particuliers. [FGN] si rein.

Prop 4.9. • $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right) \exp\left(\frac{B}{p}\right) \right)^p = \exp(A+B)$.

• $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right) \exp\left(\frac{B}{p}\right) \exp\left(-\frac{A}{p}\right) \exp\left(-\frac{B}{p}\right) \right)^{p^2} = \exp(AB-BA)$

App SO Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$.

$\mathfrak{g} = \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) / \forall t \in \mathbb{R} \exp(tX) \in G\}$.

Alors $\mathfrak{g}$ est de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ stable par $(A, B) \mapsto [A, B] = AB - BA$.

Prop 5.1 Si $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est tq $\exp(tA) \in SO_n(\mathbb{R})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors $A \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$.

(H2G2)
References [DET] Demailly

[Gau] Gaudin Algèbre

[FGN] Otaou X-ENS Algèbre 2 ♥

[ITT] Thérèse-Testard, Groupes de Lie classiques

[TAX] Tax de Talbot.

[OA] Objectif Agrégation

[Gri] Grigore.

[Rou] Rouvière

[STP] Sébastien Tattenat Algèbre L3

[FGNAR3] Otaou X-ENS Algèbre 3

au [ITT]
 p63

exo 4.27

exo 4.30

exo 4.30

au [ITT]
 p64-65

exo 4.31.