160

ENDOMORPHISMES REMARQUABLES D'UN ESPACE VECTORIEL EUCLIDIEN (DE DIMENSION FINIE)

Cadre : E un ev euclidien, f endomorphisme de E. $\mathcal{B}=(e_i)_i$ une BON. et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f$.

I. ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

1. Définitions et premières propriétés [GRi]

p238

Prop / Def 1 Il existe un et un seul endomorphisme f^* de E tel que $\forall x, y \in E \quad \langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
f^* est dit adjoint de f.
De plus $A^* = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f^* = {}^tA$

Ex 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si $\varphi_A : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tAMA$ alors $\varphi_A^* = \varphi_{{}^tA}$ [GOU] p269

p238

Prop 3. $\forall f, g \in \mathcal{L}(E)$, $\forall \lambda$ scalaire, on a :
a) $f^{**} = f$ et $(id)^* = id$
b) $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
c) $\mathrm{rg}\, f^* = \mathrm{rg}\, f$. $\det f^* = \det f$

Def 4. f est dit autoadjoint (ou symétrique) si $f^* = f$. p252

Ex 5 Dans l'ex 2, φ_A est autoadjoint ssi A symétrique.

Rq f est autoadjoint ssi la matrice qui le représente dans une BON est symétrique.

p252

Def 6 Si f est symétrique, f est positif si $\forall x \in E \ \langle f(x), x\rangle \geq 0$
f est défini positif si f est positif et $\langle f(x), x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

Def 13

Prop 7 Si f est symétrique positif, $Sp(f) \subset \mathbb{R}^+$.
défini positif, $Sp(f) \subset \mathbb{R}^{+*}$

Def 8 f est dit antisymétrique si $f^* = -f$.

2. Réduction [GOU]

Prop 9. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. p228

p258

Lem 10 F s.e.v de E stable par f. Alors $F^\perp$ stable par f^*.

Thm 11. Si f est autoadjoint. Alors il existe une BON de vecteurs propres pour f, et de plus ses valeurs propres sont réelles.

Coro 12 Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice $C \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq. $C^{-1}MC = {}^tCMC = D$, où D étant une matrice diagonale réelle

Def 13. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- M est positive si $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad {}^tXMX \geq 0$. $(M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$
- définie positive si M est positive et si ${}^tXMX = 0 \Rightarrow X = 0$ $(M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$

M est alors la matrice d'un endomorphisme symétrique positif (resp. défini positif)

Rq Le coro 12 montre que M positive (resp définie positive) ssi toutes ses valeurs propres sont positives (resp strictement positives) p245

Coro 14 Soit Φ une forme quadratique sur E. Alors il existe une bon de E dans laquelle la matrice de Φ est diagonale réelle. p245

Coro 15 Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe $C \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tC M C = I_n$ et ${}^tCNC = D$ où D est une matrice diagonale réelle.

Appli 16 Ellipsoïde de John-Loewner. [FGN AL3] DVPT
Soit K un compact non vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal qui contient K.

Appli 17 Soit $H \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique matrice R positive telle que $H = R^2$.

II. ENDOMORPHISMES NORMAUX [GOU]

1. Définitions et premières propriétés p258

Def 18 f est normal si f et f^* commutent.
De même, une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est normale si M et ${}^tM$ commutent.

Prop 19 Si f est normal alors $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.

Prop 20 Si f est normal et E_λ un sous-espace propre de f (associé à une valeur propre λ) alors $E_\lambda^\perp$ est stable par u.

Ex 20 Les endomorphismes symétriques et antisymétriques sont normaux.

DVPT

2. Réduction p258 à 262

Thm 21. Sont équivalents :
1) f est normal
2) f se diagonalise dans une BON de E.
3) f et f^* se diagonalisent dans une BON commune.

Coro 22 $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale ssi $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ tq ${}^tPMP = P^{-1}MP$ est diagonale

Lem 23 Si E est de dimension 2 et f est normal n'admettant pas de valeurs propres réelles.
Alors dans toute BON de E, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Thm 24 Si f est normal. Alors il existe une BON B de E tq
$$\mathrm{Mat}_B f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$
où $\forall i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$ et $\forall j$ $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Coro 25. Soit $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq
$$P^{-1}MP = {}^tPMP = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$
où les τ_i sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Rq On voit donc M n'est pas inversible ...

III ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX

1. Définition et premières propriétés [GRI]

Def 26 f est une transformation orthogonale si p239
$\forall x, y \in E \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
On note $O(E)$ l'ensemble des transformations orthogonales de E

Rq Un endomorphisme orthogonal est normal donc le thm 24 reste valable.

Prop 27 Les propriétés suivantes sont équivalentes p239
1. f est une transformation orthogonale
2. f est une isométrie $\quad (\forall x \in E \ \ \|f(x)\| = \|x\|)$
3. A est orthogonale $\quad$ (donc ${}^tAA = I$)

Rq Les transformations orthogonales sont caractérisées par $f^* \circ f = id$

Ex 28 $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est orthogonale donc l'endomorphisme associé l'est aussi. p241

Prop 29 Si f est orthogonale : p239
1. Les valeurs propres de f sont $+1$ ou -1.
2. $\det f = \pm 1$ en particulier f est bijective.

Prop 30 f est orthogonale ssi elle transforme toute BON en une BON. Pour cela, il suffit qu'il existe une BON qui, par f, est transformée en une BON. p240

Prop 31 L'ensemble $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = I\}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Prop 32 L'ensemble $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est un groupe, dit groupe spécial orthogonal. p241
On a $SO_n(\mathbb{R}) \triangleleft O_n(\mathbb{R})$ [GOU] p243

2. Etude en dimension 2 et 3 [GRi]

Prop 33 Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$. Alors : p242

- si $A \in SO_2(\mathbb{R})$ alors $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(rotation d'angle θ et de centre 0)

- si $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ alors $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$)

(cf Annexe 1)

Appli 34 Si f est orthogonale. Il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix}} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\theta_r & -\sin\theta_r \\ \sin\theta_r & \cos\theta_r \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

p260

- (**Prop 35** $SO_3(\mathbb{R})$ est simple) [FGNAl3]

Prop 36 Si f est tel que $A \in O_3(\mathbb{R})$. (avec $\mathcal{B}$ la base canonique)
Il existe une BON $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tq

$$\mathrm{Mat}_{(e'_i)} f = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

p243

avec $\varepsilon = 1$ si $A \in SO_3(\mathbb{R})$ (rotation)
$\varepsilon = -1$ si $A \notin SO_3(\mathbb{R})$ (rotation + symétrie)

(cf Annexe 2)

Ex 37 on reprend l'ex 28.
$\det A = 1$. donc $A \in SO_3(\mathbb{R})$ ($\varepsilon = 1$)
et $\mathrm{tr} A = 2 = 2\cos\theta + 1$ (prop 36) donc $\theta = \pm \pi/3$.
Pour trouver le signe de θ, on choisit $\vec{n} \in E_1$ (par ex $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$)
et u un vecteur du plan de rotation $E_1^\perp$ (par ex $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$)

et on a $\sin\theta = \det \| u, f(u), \vec{n} \| \times \frac{1}{\|u\|^2 \|\vec{n}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\theta = \frac{\pi}{3}$ ie A est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. p245

3. Propriétés topologiques

Prop 38 $O_n(\mathbb{R})$ est compact. [AUD] p61

Coro 39 Décomposition polaire.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\exists (U, H) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R})$ tq $M = UH$.
Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$ ce couple est unique [GOU] p249

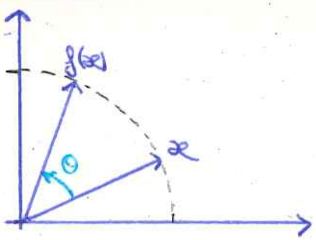
Prop 40 Le groupe $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. [AUD]

Prop 41 Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes par arcs homéomorphes à $SO_n(\mathbb{R})$. p66

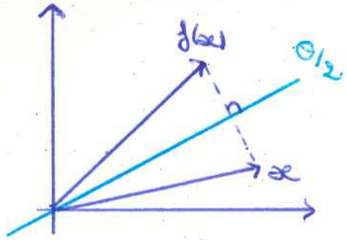
Références

[GOU] Gourdon, Algèbre, 2ème édition
[GRi] Grifone, Algèbre linéaire, 4ème édition
[AUD] Audin, Géométrie

Annexe 1

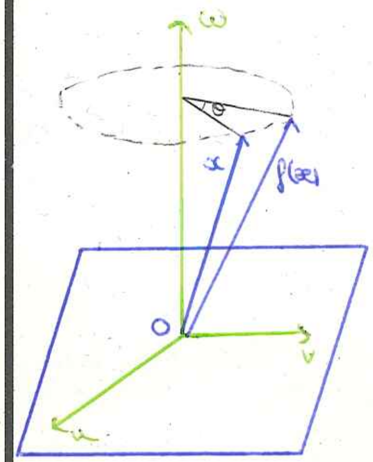


$A \in SO_2(\mathbb{R})$



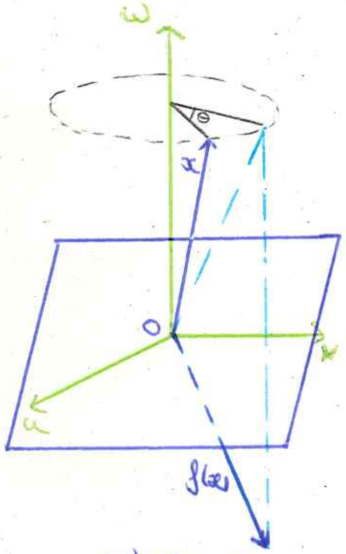
$A \notin SO_2(\mathbb{R})$

Annexe 2



$A \in SO_3(\mathbb{R})$

rotation autour de l'axe E_1



$A \notin SO_3(\mathbb{R})$

rotation autour de l'axe E_{-1} suivie de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$