

Cadre : Soit K un corps de caractéristique $\neq 2$ et E un K -espace vectoriel de dimension finie n .

I) Généralités

1) Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques.

Def 1 : Une forme bilinéaire sur E est une application $b: E \times E \rightarrow K$ qui est linéaire dans les deux arguments.
Une forme bilinéaire b est dite symétrique si $\forall x, y \in E, b(x, y) = b(y, x)$.

Def/Prop 2 : Une application $q: E \rightarrow K$ est dite forme quadratique s'il existe une application bilinéaire symétrique $b: E \times E \rightarrow K$, telle que $b(x, x) = q(x)$. Dans ce cas, b est donnée par :

$$b(x, y) = \frac{1}{2} [q(x+y) - q(x) - q(y)]. \quad b \text{ est dite forme polaire de } q.$$

Ex 3 : • $q_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad q_1(x, y) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ avec $b(x, y) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2$
• $q_2: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad A \mapsto \text{tr}(A^t A)$ avec $b(A, B) = \text{tr}(A^t B)$.

2) Expression matricielle.

Def 4 : Soit b une forme bilinéaire sur E , $\{e_i\}$ une base de E . On appelle matrice de b dans la base $\{e_i\}$ la matrice $\Pi(b) = (b(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Prop 5 : Soient b une forme bilinéaire sur E , $\{e_i\}$ base de E et $A = \Pi(b)_{e_i}$, $X = \Pi(x)_{e_i}$, $Y = \Pi(y)_{e_i}$ ($x, y \in E$). On a $b(x, y) = {}^t X A Y$.

Ex 6 : $q(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$
 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rq 7 : L'application qui à b associe sa matrice dans une base fixée de E est un isomorphisme.

Thm 8 (changement de base) : Soient B et B' deux bases de E , $P = \text{mat}(B')$ la matrice de passage de B à B' . Soit b une forme bilinéaire sur E . Alors $\text{mat}_{B'}(b) = {}^t P \text{mat}_B(b) P$.

Def 9 : On appelle matrice de q la matrice de sa forme polaire associée.

Ex 10 : $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par $q(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1 x_2 - 3x_1 x_3 + 8x_2 x_3$

$$\text{mat}_B(q) = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 3 & 4 \\ -3/2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Rang et noyau d'une forme quadratique.

Def 11 : On appelle rang et noyau noté $N(q)$ d'une forme quadratique q , le rang et le noyau de la forme polaire associée à q .

On a $N(q) = \{x \in E \mid b(x, y) = 0, \forall y \in E\}$.

q est dite non dégénérée si $N(q) = \{0\}$, i.e $b(x, y) = 0, \forall y \in E \Rightarrow x = 0$.

Def 12 : Si q est une forme quadratique à valeurs réelles, q est dite définie positive si $q(x) \geq 0, \forall x \in E$ et $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

• q est dite définie si $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Prop 13 : Une forme quadratique définie est non dégénérée.

Ex 14 : Dans l'exemple précédent, q est non dégénérée et non définie.

Prop 15 : $\dim E = \dim N(q) + \text{rg}(q)$

II) Orthogonalité et isotopie

1) Orthogonalité

Soit q une forme quadratique et Ψ sa forme polaire associée.

Def 16 : Deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux pour q (ou Ψ) si $\Psi(x, y) = 0$.

• Soit A un sous-ensemble de E . On appelle orthogonal de A pour q (ou Ψ) l'ensemble $A^\perp = \{x \in E \mid \Psi(x, a) = 0, \forall a \in A\}$.
• Deux sous-ensembles A et B sont dits orthogonaux si $\forall x \in A, \forall y \in B, \Psi(x, y) = 0$.

Prop 17 : i) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E
ii) $E^\perp = N(q)$

Prop 18 : Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors

i) $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N)$

ii) $F^{\perp\perp} = F + N$ où $N := N(q)$.

En particulier si q est non dégénérée :

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp$$

$$F^{\perp\perp} = F$$

C-ex 19 : $E = \mathbb{R}^2, q(x) = x_1^2 - x_2^2, F = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $F = F^\perp$.

q est non dégénérée mais $E \neq F \oplus F^\perp$.

2) Isotopie.

Def 20 : On appelle cône isotrope l'ensemble $I(q) := \{x \in E \mid q(x) = 0\}$.

Rq 21 : $I(q)$ n'est pas un espace vectoriel.

[GR1] p303

Ex 22 : i) $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = x_1^2 - x_2^2$, $I(q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm x_2\}$
 ii) $E = \mathbb{R}^3$, $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, $I(q) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$
 (cf figures 1 et 2).

Prop 23 : $N(q) \subset I(q)$.

Ex 24 : Dans les exemples précédents, $N(q) = \{0\}$ donc on n'a pas l'inclusion réciproque.

Def 25 : Un sous-espace vectoriel F de E est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.

Rq 26 : Il existe des sous-espaces isotropes ssi $I(q) \neq \{0\}$.

Prop 27 : Soit F un sous-espace de E . Alors :

$E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ est non isotrope (ie $F \cap F^\perp = \{0\}$).

Ex 28 : $q: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_3x_4$.

Tout hyperplan F d'équation $ax_1 + x_2 + bx_3 + x_4 = 0$ est isotrope.

Ex 29 : $q: \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $F = \{A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$
 $A \mapsto \det(A)$

$F^\perp = \{A \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$ F est non isotrope et $\mathcal{S}_2(\mathbb{R}) = F \oplus F^\perp$.

3) Groupe orthogonal.

Prop 30 : Soit (E, q) un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q non dégénérée et soit f un endomorphisme de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $q(f(x)) = q(x)$, $\forall x \in E$

ii) $q(f(x), f(y)) = q(x, y)$, $\forall x, y \in E$

iii) $f^* \circ f = \text{id}$ (ou d'une manière équivalente $f \circ f^* = \text{id}$).

En particulier f est bijectif.

Un tel endomorphisme est dit orthogonal relativement à q .

On note $O(q) = \{f \in \text{End}(E) \mid f^* \circ f = \text{id}\}$.

$O(q)$ est un groupe, on l'appelle groupe orthogonal de q .

[GR1] p342

[GR1] p342

[GR1] p320

[GR1] p316

[GR1] p217

[GR1] p324

[GR1] p304-305

[GR1] p306-307

[GR1] p313

[X-ENS M3]

[PER] p227

Prop 31 : Soit B une base de E , $S = \text{mat}_B(q)$ et $A = \text{mat}_B(f)$.

On a $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tASA = S$.

Ex 32 : $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par $q(x) = 2x_1x_2$.

$O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1/b & 0 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$.

4) Base orthogonale et réduction simultanée.

Def 33 : Une base $\{e_i\}$ est une base orthogonale pour q si $q(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$. Elle est dite orthonormée si $q(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Prop 34 : ($E \neq \{0\}$) Il existe sur E des bases orthogonales pour q .

En d'autres termes, il existe toujours une base $\{e_i\}$ telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ alors $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ (avec $a_i \in K$) où $r = \text{rg}(q)$.

Méthode de Gauss : Pour toute forme quadratique q , il existe $r = \text{rg}(q)$ formes linéaires $l_1, \dots, l_r$ telles que $q = \sum_{i=1}^r a_i (l_i)^2$, $a_i \in K$. Cela permet de trouver des bases q -orthogonales.

Ex 35 : $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2x_3$

$\Rightarrow q(x) = \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 + 9x_3)^2 - \frac{1}{20}(5x_1 + 5x_2 - 3x_3)^2 - \frac{18}{5}x_3^2$.

Thm 36 : Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E . Il existe alors des bases qui sont orthogonales à la fois pour $\langle, \rangle$ et pour q .

Appli 37 : Convexité logarithmique du déterminant

Soit A, B dans $\mathcal{M}_n^{++} = \{\text{matrices symétriques réelles définies positives}\}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

Appli 38 : Ellipsoïde de John-Voronoi.

DVPT

Soit K compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K .

II) Classification des formes quadratiques

Def 39 : Soient f, f' deux formes sesquilinéaires sur E . On dit que f et f' sont équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tq $\forall x, y \in E, f'(x, y) = f(u(x), u(y))$. C'est équivalent à $\exists P$ inversible tq $\text{mat}_B f' = {}^t P (\text{mat}_B f) P$.

Sur $\mathbb{C}$:

Thm 40: Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$ (E est donc isomorphe à $\mathbb{C}^n$ moyennant le choix d'une base) et q une forme quadratique sur E . Il existe une base $\{e_i\}$ telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ ($n = \text{rg}(q)$)

c'est-à-dire $\text{mat}_{\{e_i\}} q = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cor 41: q non dégénérée $\Leftrightarrow \text{rg}(q) = n \Leftrightarrow \exists \{e_i\}$ q -orthonormée.

Csq 42: Il existe une unique classe d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées.

Sur $\mathbb{R}$:

Thm 43 (Sylvester): Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ ($E \cong \mathbb{R}^n$) et q une forme quadratique sur E . Il existe alors une base $\{e_i\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$

c'est-à-dire $\text{mat}_{\{e_i\}} q = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{n-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

où $r = \text{rg}(q)$ et p est un entier qui ne dépend que de q (pas de la base). Le couple $(p, r-p)$, noté $\text{sign}(q)$, est dit signature de q .

Ex 44: Signature du déterminant dans $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$
 $\text{sign}(q) = (2, 2)$.

Cor 45: Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E de dim finie n . Alors:

- (i) q est définie positive $\Leftrightarrow \text{sign}(q) = (n, 0)$
- (ii) q est non dégénérée $\Leftrightarrow \text{sign}(q) = (p, n-p)$

Csq 46: Il y a $n+1$ classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées.

Corps finis:

Thm 47: Soit $K = \mathbb{F}_q$ de caractéristique $p \neq 2$ et E un K -espace de dim n . Soit $\alpha \in \mathbb{F}_q^* \setminus \mathbb{F}_q^{*2}$. Il y a deux classes d'équivalences de formes quadratiques non dégénérées sur E , représentées par $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

IV) Application à la géométrie différentielle.

Thm 48: Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $df_a = 0$ pour un $a \in U$, de sorte que $f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2)$, où Q est la forme quadratique:

$$Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Alors:

(i) si f admet un minimum (resp maximum) relatif en a , Q est une forme quadratique positive (resp négative).

(ii) si Q est une forme quadratique définie positive (resp définie négative), f admet un minimum (resp un maximum) relatif en a .

Ex 49: (en dimension 2)

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ tq $df_a = 0$ pour $a \in U$.

On note $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. Alors:

- si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet un minimum relatif en a .
- si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet un maximum relatif en a .
- si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a .
- si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Thm 50: réduction des formes quadratiques, version différentielle

Soit $A_0 \in \mathcal{Y}_m(\mathbb{R}) \cap \text{GL}_m(\mathbb{R})$ et $\Psi: \mathcal{O}_m(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{Y}_m(\mathbb{R})$
 $\pi \mapsto {}^t \pi A_0 \pi$

Alors il existe $N \subset \mathcal{Y}_m$ voisinage de A_0 et $\Psi: V \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\forall A \in V$, $A = {}^t \Psi(A) A_0 \Psi(A)$, ie toute forme quadratique suffisamment voisine d'une forme quadratique non dégénérée lui est équivalente.

DUPT

Appl 51: Somme de Morse

Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^3$, $U \ni 0$ ouvert. On suppose que $df(0) = 0$ et $df^2(0)$ est de signature $(p, m-p)$. Alors il existe $\Psi: x \mapsto \Psi(x) = u$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$ tq $\Psi(0) = 0$ et $f(x) - f(0) = u_1^2 + \dots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \dots - u_m^2$

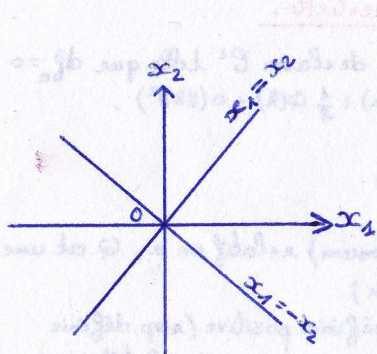


Figure 1

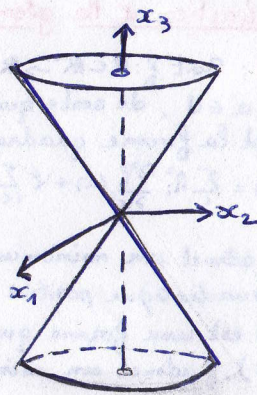


Figure 2

Références:

[GR]: Grifone, Algèbre linéaire

[GOU]: Gouidon, Algèbre

[PER]: Perrin, Cours d'Algèbre

[GOU Am]: Gouidon, Analyse

[ROUVIERE]: Petit guide du calcul diff (Lemme de Lorse)

[X-ENS AP3]: Oraux X-ENS Algèbre 3 (John-Loewner)