

Cadre: (E, d) un espace métriqueI. Généralités1) Définitions et caractérisations

Def 1: (E, d) est dit compact si de tout recouvrement de E par des ouverts de E , on peut en extraire un sous-recouvrement fini, ie si $E = \bigcup_{i \in I} O_i$ avec O_i ouvert alors il existe $J \subset I$, J fini tq $E = \bigcup_{i \in J} O_i$.

Ex 2: Un espace métrique fini est compact.

Ex 3: $\mathbb{R}$ n'est pas compact. ($\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-n, n[$)

Ex 4: Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors $[a, b]$ est un sous-espace compact de $\mathbb{R}$.

Prop 5: Un espace métrique compact est borné.

Prop 6: Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides dans un compact, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Prop 7: Une réunion finie de parties compactes est compacte. Une intersection de compacts est compacte.

Thm 8: (Bolzano-Weierstraß): E est compact si et seulement si de toute suite de points de E , on peut extraire une sous-suite convergente dans E .

Thm 9: Un sous-espace fermé d'un espace métrique compact est compact.

Coro 10: Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées.

Thm 11: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. La suite $(x_n)_n$ converge ssi elle possède au plus une valeur d'adhérence, où E est compact.

Appli 12: (Graphe fermé compact). Soient E et F deux espaces métriques avec F compact, et soit f une application de E dans F . f est continue ssi le graphe de f est fermé dans $E \times F$.

Lem 13: Si (x_n) est une suite de réels alors on a équivalence entre
1) la suite $(e^{ix_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$
2) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Appli 14: Soient $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes et X une variable aléatoire réelle. Si X_n converge en loi vers X , alors X est une variable aléatoire réelle gaussienne.

2) Extraction diagonale

Thm 15: Soit $(X_p, d_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques et $(x_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X_p . Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{x_n^{(p)} | n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact (ie d'adhérence compacte dans X_p) dans X_p , alors il existe une fonction strictement croissante $\Phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, la suite $(x_{\Phi(n)}^{(p)})$ est convergente dans X_p . [H-L] p11

Coro 16 (Tychonoff). Soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts et soit $X = \prod_{p \in \mathbb{N}} X_p$ muni de la distance produit $d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \min(d_k(x_k, y_k), 1)$. Alors X est compact. [H-L] p12

Appli 17: Compacité de l'opérateur de convolution: (DEV) Pour $f \in E = \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), 2\pi \text{ périodique}\}$ et $k \in E$, on pose $Kf(x) = \int_0^{2\pi} k(x-t)f(t)dt$ alors K est un opérateur compact. [FGN] ana 2 p357

Thm 18: (Helly): 1) Soit $E \subset \mathbb{R}$ dénombrable et (f_n) une suite de fonctions de E dans $\mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, |f_n(x)| \leq 1$ alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. 2) Si (f_n) est une suite de fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ alors il existe une sous-suite de (f_n) qui converge simplement vers une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$. (DEV) [FGN] ana 2 p166

Thm 19: (Dini) Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$, $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue f . Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, alors la convergence est uniforme. [FGN] ana 2 p156

Appli 20: L'application $t \mapsto \sqrt{t}$ est limite uniforme de polynômes sur $[0, 1]$. [NCW] p1

II. Fonctions continues sur un compact1) Extremums

Prop 21: Soit E compact et (F, d) un espace métrique. Si $f: E \rightarrow F$ est une application continue alors $f(E)$ est compact. [Gou] p31

Cex 22: $\sin^{-1}([-1, 1]) = \mathbb{R}$ [HAU] p304

Prop 23: Soit $f: (E, d) \rightarrow (F, d)$ continue et bijective. Si E est compact alors $f^{-1}: F \rightarrow E$ est continue. [Gou] p31

Prop 24: Soit $f: (E, d) \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec E compact. Alors f est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe $c, d \in E$ tels que $f(c) = \inf_{x \in E} f(x)$ et $f(d) = \sup_{x \in E} f(x)$. [Gou] p31

(GOU) p71 Appli 25 : (Théorème de Rolle). Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :
 f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$ alors
il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

(FGN) ody 3 p229 Appli 26 (Ellipsoïde de John-Löwner) (DEV)
Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$, alors il
existe un unique ellipsoïde centré en O et de volume minimal
contenant K .

(PON) p295 Prop 27 : Soit E un evn de dimension finie et f une application
continue de E dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Alors f est minorée
et atteint son minimum.

(PON) p296 Appli 28 : Théorème de D'Alembert - Gauss. Soit P un polynôme
complexe non constant alors P a au moins une racine complexe.

(PON) p296 Appli 29 : La distance d'un point x à une partie fermée non
vide F d'un evn de dimension finie est atteinte

(PON) p296 Appli 30 : Polynômes de meilleure approximation. Soit $n \in \mathbb{N}$ et
 $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty$.

2) Théorème de Heine

(PON) p66 Thm 31 (Heine). Soit f une application continue de l'espace métrique
compact (E, d) dans l'espace métrique (F, δ) . Alors f est
uniformément continue.

(PON) p61 Ex 32 : Toute fonction continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est uniformément
continue. Toute fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des
limites finies en $+\infty$ et en $-\infty$ est uniformément continue.

(PON) p62 Appli 33 : Une fonction f continue du segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dans un
evn E est limite uniforme d'une suite de fonctions affines
par morceaux.

(FGN) ana2 p156 Thm 44 (Dini). Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$
dans $\mathbb{R}$, qui converge simplement vers f continue et tq chaque f_n
est croissante. Alors la convergence est uniforme.

(INAV) p3 Appli 45 : (Glivenko-Contelli). Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de
va. réelles iid définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,
et F la fonction de répartition commune. Si par $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on
pose $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k \leq t\}}$ alors ps $\|F_n - F\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

3) Théorèmes de point fixe

Thm 46 : Soit (E, d) un espace métrique compact et
 $f: E \rightarrow E$ une application telle $\forall x \neq y \in E^2, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$
alors f admet un unique point fixe.

C-ex 47 : le résultat est faux si E est seulement complet.
avec $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ continue et on a $\forall x \neq y$
 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ mais f est sans point fixe.

Appli 48 : Soit K un compact convexe d'un evn et $f: K \rightarrow K$ une
application continue telle que $\forall (x, y) \in K^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$
alors f admet au moins un point fixe.

III - Compacité dans les evn

1) En dimension finie

Prop 49 : les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés
bornés de $\mathbb{R}^n$.

Thm 50 : Dans un evn de dimension finie, toutes les normes
sont équivalentes.

Appli 51 : Toute application linéaire d'un evn de dimension
finie dans un evn (quelconque) est continue

C-ex 52 : En dimension infinie, on munit $\mathbb{R}(X)$ de la norme
 $\|\sum a_i X^i\| = \sup |a_i|$ alors l'application linéaire $f: \mathbb{R}(X) \rightarrow \mathbb{R}(X)$
 $p \mapsto p'$ n'est pas continue. (car $\|f(X^n)\| = n$ et $\|X^n\| = 1$)

Appli 53 : Sous-groupes compacts de $GL(\mathbb{R})$ (DEV)
Les sous-groupes compacts de $GL(\mathbb{R})$ sont exactement les sous
groupes de O_n à conjugaison près.

Caro 54 : Les parties compactes d'un evn de dimension finie
sont les parties fermées bornées.

Thm 55 : (Riesz). Un evn est de dimension finie si et seulement si
la boule unité fermée est compacte.

(GOU)
p34

(GOU)
p34

(GOU)
p52

(GOU)
p30

(GOU)
p50

(GOU)
p50

(GOU)
p50

(ALE)
p141, 160

(GOU)
p50

(GOU)
p56

2) Espaces de fonctions

[H-L] p28 Def 56: Une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite séparante si $\forall (x, y) \in X^2$ avec $x \neq y$, il existe $h \in H$ telle que $h(x) \neq h(y)$.

[H-L] p29 Thm 57: Toute sous-algèbre (si $f, g \in H$ alors $fg \in H$) de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ séparante et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. (Stone-Weierstraß)

[H-L] p29 Appl 58. Théorème de Weierstraß: Si $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle compact alors les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

[H-L] p30 Thm 59: Toute sous-algèbre H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ séparante, auto-conjuguée ($\forall h \in H, \bar{h} \in H$) et contenant les fonctions constantes est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. (Stone-Weierstraß complexe)

[H-L] p30 Ex 60: L'ensemble des fonctions lipschitziennes de X dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

[H-L] p38 Def 61: Une partie H de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est dite équicontinue en un point x_0 de X si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, d(x, x_0) < \eta \Rightarrow \forall h \in H, |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon$. Elle est dite équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X .

[H-L] p39 Thm 62 (Ascoli): Une partie de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ si et seulement si elle est bornée et équicontinue.

[ZQ] p359 Thm 63 (Cauchy-Peano) (DEV)
Soit $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors $\forall (t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ il existe une solution de l'équation
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

[ZQ] p359 C-ex 64: On n'a pas l'unicité. Par exemple,
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x^{2/3} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$
 admet deux solutions sur $\mathbb{R}$, $x_1(t) \equiv 0$ et $x_2(t) = t^3$

- Zuily-Queffelec, Analyse par l'agrégation, 4^e édition
- Gourdon, Analyse, 2^e édition
- Pommellet, Cours d'analyse
- Hirsch-Lacombe, Éléments d'analyse fonctionnelle
- Orlaux X-ENS analyse 2
- Orlaux X-ENS algèbre 3
- Nourdin
- Hauchecorne
- Alessandri, Thèmes de géométrie