

I) Méthodes directes

1) Primitives

a) Primitives usuelles [GOU] p. 133

Soit f continue et F une de ses primitives: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Ex 1: $\int_a^b \frac{1}{1+x^2} = [\arctan x]_a^b = \arctan(b) - \arctan(a)$

b) Fractions rationnelles [GOU] p. 133+138

Pour calculer $\int F$ avec $F \in \mathbb{R}(X)$, on décompose F en éléments simples pour se ramener à $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$ et $\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$ où $c^2-4d < 0$

Ex 2: $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + \frac{1}{2(1+x^2)} + k$

c) Polynômes en sinus et cosinus [GOU] p. 135

On cherche à calculer $\int \sin^m(x) \cos^n(x) dx$, $m, n \in \mathbb{N}$.

- Si m et n sont pairs: on linéarise.
- Sinon: on effectue un changement de variable ($t = \sin x$ ou $\cos x$).

Ex 3: Pour calculer $\int \cos^4(x) dx$ on utilise:

$$\cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + 4 \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3 \right)$$

$$= \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{3}{8}$$

2) Intégration par parties [GOU] p. 123+126+159

Thm 4: Soient $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 .

Alors $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$

Ex 5: Intégrales de Wallis: $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx = (n-1)(W_{n-2} - W_n)$

Ex 6: Fonction Gamma d'Euler: $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$

3) Changement de variables [GOU]

Thm 7: Soit $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 et $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ C^0 , $\varphi([a, b]) \subset I$.

Alors $\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$ p. 123

Ex 8: Règles de Brioché pour calculer $\int R(\cos x, \sin x) dx$ avec R fraction rationnelle. p. 135

- Si $R(\cos x, \sin x)$ invariant par $x \rightarrow -x$, on pose $t = \cos x$
- Si $R(\cos x, \sin x)$ invariant par $x \rightarrow \pi - x$, on pose $t = \sin x$
- Si $R(\cos x, \sin x)$ invariant par $x \rightarrow \pi + x$, on pose $t = \tan x$

Ex 9: $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx \xrightarrow{t = \cos x} \int \frac{1-t^2}{1+t^2} (-dt) = t - 2 \arctan t + k$ p. 135

$\Rightarrow \int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx = \cos x - 2 \arctan(\cos x) + k$

Thm 10: Soit $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 difféomorphisme, $V = \varphi(U)$, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 .

Alors $\int_V f(u) du = \int_U f(\varphi(u)) |J(\varphi)(u)| du$ où $J(\varphi)(u) = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(u) \right)$ p. 334

App 11: Coordonnées polaires. Si Δ représente D en coordonnées polaires, $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ p. 335

4) Fubini [GOU] p. 333+335

Thm 12: Soient P, Q deux pavés compacts de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ et $f: P \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ C^0 . Alors $\int_{P \times Q} f(x, y) dx dy = \int_P \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx = \int_Q \left(\int_P f(x, y) dx \right) dy$

Ex 13: Intégrale de Gauss: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $C_a = [-a, a]^2$

$I_a = \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi(1 - e^{-a^2})$ $I_a \leq J_a \leq I_{\sqrt{2}a}$

$J_a = \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2$ puis $a \rightarrow +\infty$

II) Autres méthodes

1) Pour des suites et séries de fonctions

Thm 14: Soit $(f_n)_n$ C^0 . (Convergence dominée) [GOU] p. 147

- $\exists \varphi$ C^0 et intégrable telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n
- $f_n \rightarrow f$ simplement avec f C^0

Alors les $(f_n)_n$ et f sont intégrables et $\lim \int f_n = \int f$.

App 15: Intégrale de Fresnel: $\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [GOU] p. 342 DVP

Thm 15: Soit $\sum_{n=0}^\infty f_n$ une série de fonctions C^0 et intégrables.

- Si $f = \sum_{n=0}^\infty f_n$ est C^0 et que $\sum_{n=0}^\infty (\int |f_n|)$ converge simplement
- Alors f est intégrable et $\int f = \sum_{n=0}^\infty \int f_n$. [MER] p. 141

Ex 16: $\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ [NER] p. 145

2) Sommes de Riemann [GOU] p. 124-125

Def 17: Soit f bornée sur $[a, b]$, $\sigma: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ subdivision, $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Somme de Riemann de f : $S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$

Thm 18: Soit f Cpm sur $[a, b]$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall \sigma, \forall \xi$,
 $|\sigma| := \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}| < \alpha \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - S(f, \sigma, \xi) \right| \leq \varepsilon$.

En particulier, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$

Ex 19: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$.

3) Intégrales à paramètres [GOU] p. 157 + 164

Thm 20: Soit f définie sur $A \times I \subset \mathbb{R}^2$.

- $t \mapsto f(x, t)$ est Cpm sur $I \forall x \in A$
- $x \mapsto f(x, t)$ est C^0 sur $A \forall t \in I$
- $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ avec φ Cpm intégrable sur I

Alors $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue.

Thm 21: Soit f définie sur $A \times I \subset \mathbb{R}^2$.

- $t \mapsto f(x, t)$ est Cpm et intégrable sur $I \forall x \in A$
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant le thm 20

Alors $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est C^1 et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Ex 22: $\forall x > 0, I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

$I'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow I(x) = I(0) + \arctan(x) = \arctan(x)$

Ex 23: $\forall x > 0, I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{2\pi i x t} dt$

$I'(x) = -2\pi^2 x I(x) \Rightarrow I(x) = I(0) e^{-\pi^2 x^2} = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}$

4) Analyse complexe

Def 24: $\gamma: [0, 1] \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ chemin fermé Cpm, $a \notin \gamma([0, 1])$.

Indice de γ par rapport à a : $I(\gamma, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$ [CA] p. 62

Def 25: Soit f une fonction holomorphe.

Le coefficient a_{-1} de la série de Laurent $\sum a_n (z-a)^n$ de f est appelé résidu de f en a , noté $\text{Res}(f, a)$. [CA] p. 66

Thm 26: (Théorème des résidus) [CA] p. 67

Soit f holomorphe sur $U = U(a_1, \dots, a_n)$. Soit γ un chemin régulier fermé dans U tel que $I(\gamma, z) = 0$ pour tout $z \notin U$.

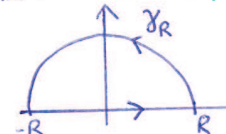
Alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n I(\gamma, a_k) \text{Res}(f, a_k)$

Ex 27: $I(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt, x \in \mathbb{R}$. [CA-1] p. 249

$I(x) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt \right)$

On intègre $z \mapsto \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ sur γ_R .

Le théorème des résidus donne: $I(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$



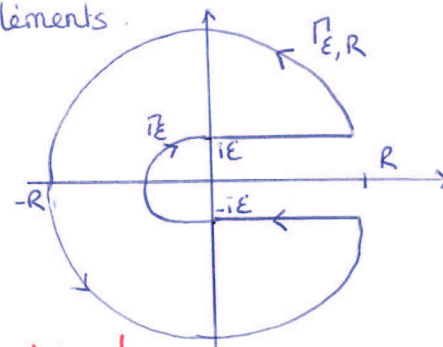
App 28: Formule des compléments.

Pour $0 < \text{Re}(z) < 1$ on a

$\Gamma(z) \Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$

[CA-1] p. 249

DVP



III) Calcul approché d'intégrales

1) Méthode des rectangles [LEN] p. 59

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$.

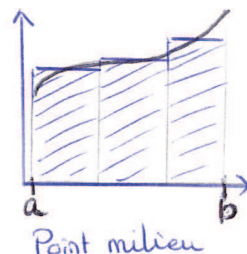
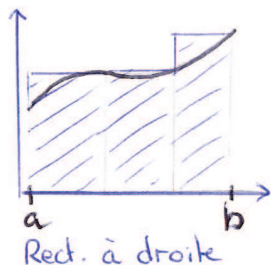
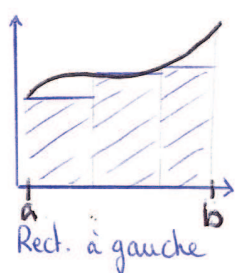
Charles: $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$. Donc pour calculer $\int_a^b f(x) dx$ on est ramené à évaluer l'intégrale de f sur $[x_i, x_{i+1}]$

Méthode des rectangles:

- à gauche: $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_i)$
- à droite: $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) f(x_{i+1})$

Méthode du point milieu:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$



2) Méthode de Monte-Carlo [TOU] p. 79-80 + 82.

On cherche à évaluer $I = \int_a^b f(x)g(x)dx$ où $f \geq 0$ et $\int_a^b f = 1$.
Si Y est une va de densité f , alors $I = E[g(Y)]$.

Soient $(Y_i)_{i \geq 0}$ iid de même loi que Y .

La loi des grands nombres donne: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(Y_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$.

Cela nous permet d'approcher I : $I \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(Y_i)$ pour n assez grand.

Avantage: aucune hypothèse de régularité sur f .

Inconvénient: vitesse de convergence lente: $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (TCL)

Ex 2.9: Approximation de π :

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1-Y_i^2} \quad \text{avec } (Y_i)_i \text{ iid } \sim \mathcal{U}[0,1]$$

Références:

[GOU]: Gourdon, Analyse, 1^{ère} édition

[TER]: Terlin, Méthodes d'Analyse

[OAT]: Beck, Talick, Peyré, Objectif Agrégation, 1^{ère} édition

[AT]: Amar, Tatherson, Analyse complexe

[DET]: Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, édition 2006