

I - Convergence

1) Suites de fonctions

Def 1 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $X \rightarrow E$ et f une application de X dans E . (f_n) converge simplement vers f sur X si $\forall x \in X$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers $f(x)$. En d'autres termes :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Ex 2 : Sur $[0, 1]$, $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Def 3 : $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad (\text{CVU})$$

Prop 4 : Si (f_n) converge uniformément vers f sur X alors elle converge simplement vers f sur X .

C-ex 5 : $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Prop 6 : $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur X ssi il existe une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tq $(f_n(x_n) - f(x_n)) \not\rightarrow 0$

Ex 7 : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$ ne converge pas uniformément. ($x_n = \frac{\pi}{2n}$)

Prop 8 : (Critère de Cauchy uniforme)

(f_n) CVU sur X ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq n, \forall x \in X, \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon$

Appli 9 : La limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes est une fonction polynôme

Def 10 : On note $B(X, E)$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans E . On pose pour $f \in B(X, E)$ la norme $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ appelée norme de la convergence uniforme

Prop 11 : $(f_n)_n \in B(X, E)^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in B(X, E)$ sur X ssi $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$. $(B(X, E), \|\cdot\|_{\infty})$ est complet.

Thm 12 : (Weierstraß) : Toute fonction continue $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynômes.

(DEV)

2) Séries de fonctions

Def 13 : On appelle série des fonctions f_n et on note $\sum f_n$, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n : X \rightarrow E$ et est appelée la n-ième somme partielle de la série $\sum_{k=0}^n f_k(x)$.

Def 14 : Si $(S_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur X , on dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur X . La fonction limite S de (S_n) s'appelle la fonction somme de la série $\sum f_n$, on note $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Def 15 : On appelle reste d'ordre n d'une série simplement convergente $\sum f_n$, la fonction $R_n : x \in X \rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$

Ex 16 : Sur $\mathbb{R}^+$, $\sum_{n=0}^{\infty} x e^{-nx}$ converge simplement vers $\begin{cases} \frac{x}{1-e^{-x}} & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Def 17 : $\sum f_n$ converge uniformément sur X si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU sur X .

Prop 18 : Si $\sum f_n$ CVU sur X alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers 0

Prop 19 : Soit $\sum f_n$ une série simplement convergente alors on a : $\sum f_n$ CVU sur X ssi $(R_n)_n$ CVU vers 0 dans X

C-ex 20 : Convergence simple de $\sum f_n \not\Rightarrow$ CVU de $\sum f_n$

car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x e^{-nx}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$

Prop 21 : Critère de Cauchy uniforme : $\sum f_n$ CVU sur X ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq n, \forall x \in X, \|\sum_{k=n}^p f_k(x)\| \leq \varepsilon$

Def 22 : $\sum f_n$ cvge absolument sur X si $\forall x \in X, \sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n(x)\|$ converge

Prop 23 : Si $\sum f_n$ converge absolument sur X alors elle converge simplement sur X

C-ex 24 : $\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas absolument.

Def 25 : On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur X si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in B(X, E)$ et si $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge.

Ex 26 : $\sum x e^{-nx}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$

Thm 27 : Si $\sum f_n$ converge normalement sur X alors elle converge absolument et uniformément sur X et on a $\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\|_{\infty} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}$

C-ex 28 : sur $(0, 1]$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}[\cup [\frac{1}{n}, 1] \\ \frac{1}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \end{cases}$
 $\sum f_n$ CVU sur $(0, 1]$ mais pas normalement.

3) Limite et continuité

Thm 29 : X partie non vide d'un evn de dim finie F , (f_n) une suite uniformément convergente d'applications continues de X dans E . Alors la limite f est continue

Thm 30 (Double limite) : Soit $f_n : X \rightarrow E$ convergeant uniformément vers f . Soit $a \in X$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, b_n := \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe

[AMR] p189

[AMR] p190

[AMR] p190

[AMR] p190

[AMR] p191

[AMR] p191

[AMR] p191

[AMR] p192

[AMR] p192

[AMR] p192

[AMR] p192

[AMR] p193

[AMR] p193

[AMR] p193

[AMR] p194

[AMR] p196

[AMR] p197

alors la limite uniforme de (f_n) a pour limite lorsque x tend vers a : $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

[ANR] p195 **Thm 31** : Soit $a \in \bar{X}$ et $\sum f_n : X \rightarrow E$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n a une limite f_n en a si $\sum f_n$ CVU, alors $\sum f_n$ cvge dans E et $\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ie $\lim_{x \rightarrow a} (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x))$

[ANR] p195 **Thm 32** : Soit (f_n) n^{em} suite de fonctions continues de X dans E tq $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et $\sum f_n$ CVU sur X alors la fonction somme de la série $\sum f_n$ est continue sur X

[ANR] p196 **Ex 33** : $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

II - Dérivation et intégration

1) Dérivabilité

[ANR] p150 **Thm 34** : Soit (f_n) une suite d'applications $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans E . Si $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))_n$ converge et si $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers g alors (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f \in \mathcal{C}^1$. De plus, $f' = g$

[ANR] p198 **Thm 35** : Soit (f_n) suite de fonctions dérivables de I dans E . Si il existe $a \in I$ tq $\sum f_n(a)$ converge et si $\sum f'_n$ converge uniformément sur I alors $\sum f_n$ converge simplement sur I , uniformément sur tout segment inclus dans I et S dérivable avec $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n$.

[ANR] p148 **C-ex 34 bis** : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $\mathbb{R}$ converge vers $f(x) = |x|$ pas dérivable en 0, mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^\infty$.

[ANR] p198 **Ex 36** : $\mathcal{E} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ sur $]1, +\infty[$, on a $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^\infty(]1, +\infty[)$

[ANR] p221 **Ex 37** : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

2) Convergence dans un espace mesuré

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré

[BP] p105 **Def 38** : Soit N un ensemble mesurable tel que $\mu(N) = 0$ $f_n \rightarrow f$ μ -pp si $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X \setminus N$.

Def 39 : Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ pour tout $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$. f_n converge dans L^p vers f si $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ex 40 : Exemple de convergence L^p non μ -pp :

Dans $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue.

On pose $\forall n \geq 0$ et $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $f_{2^n+k} = \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}$ $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans L^p mais pas μ -pp.

Prop 41 : Soient $(f_n)_{n \geq 1} \in (L^p_{\mathbb{K}}(\mu))^{\mathbb{N}}$ et $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$. Il existe une sous-suite $(f_{p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et une fonction $g \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ telle que $|f_{p(n)}| \leq g$ μ -pp et $f_{p(n)} \xrightarrow{\mu\text{-pp}} f$

2) Intersion limite et intégrale

Thm 42 (Beppo-Levi) : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré et $(f_n)_{n \geq 1}$ suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors $\lim_n f_n$ est mesurable et $\int_X \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}^+}$

Thm 43 (Lemme de Fatou) : Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions mesurables positives alors $0 \leq \int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu \leq \infty$

Appl 44 : Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers f et tq $\sup_n \int_X |f_n| d\mu < \infty$ alors $f \in L^1(\mu)$

Prop 45 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (L^p_{\mathbb{K}}(\mu))^{\mathbb{N}}$ convergeant μ -pp vers f

1) si $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ alors $f \in L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$

2) s'il existe $g \in L^p_{\mathbb{R}^+}(\mu)$ telle que $|f_n| \leq g$ μ -pp $\forall n \in \mathbb{N}$ alors $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$

Cas plus simples

Thm 46 : Soit $(f_n)_n$ convergeant uniformément de fonctions intégrables sur le compact $[a, b]$ à valeurs dans E . Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$

Thm 47 : Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$, convergeant simplement vers f sur $[a, b]$. Si les fonctions f_n sont bornées par un même nombre k et si (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle compact $c \subset]a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b]$ et on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Ex 48 : $f_n(x) = (\sin(x))^n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx = 0$

Thm 49 : Soient $-\infty < a < b < \infty$ et (f_n) une suite de $\mathcal{J}_a, b[$ dans E . Si (f_n) converge uniformément sur tout segment de $\mathcal{J}_a, b[$ vers f , si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b f_n(x) dx$ converge, si il existe $\varphi : \mathcal{J}_a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\int_a^b \varphi(x) dx$ converge et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathcal{J}_a, b[$, $\|f_n(x)\| \leq \varphi(x)$

[BP] p162

[BP] p162

[BP] p131

[BP] p131

[BP] p132

[BP] p165

[ANR] p151

[ANR] p152

[ANR] p153

[ANR] p153

alors, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est convergente et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

[ANR]
p155

Thm 50 : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de $f_n, a, b \in \mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}_m(a, b)$, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a, b]$ vers f , si $f \in \mathcal{C}_m(a, b)$ et s'il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\in \mathcal{C}_m$, positive, telle que $\int_a^b \varphi(x) dx$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \int_a^b |f_n(x)| dx$ converge, $\int_a^b |f(x)| dx$ converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

[ANR]
p156

Ex S1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} dx = 0$

3) Intersersion somme et intégrale

[ANR]
p199

Thm 52 : Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est intégrable sur $[a, b]$, $(\int_a^b f_n(t) dt)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et on a $\int_a^b (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_a^b f_n(t) dt)$

[ANR]
p215

Ex 53 : $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$

[ANR]
p200

Thm 54 : Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ suite de fonctions $\mathcal{C}_m(I)$, I intervalle qq. telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |f_n(x)| dx < \infty$. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I , si $S \in \mathcal{C}_m(I)$, si $\sum \int_I |f_n(x)| dx$ converge absolument alors $\int_I |S| dx < \infty$ et $\int_I S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(x) dx$

[BP]
p147

Ex 55 : $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$

III - Séries entières

[ANR]
p229

Def 56 : On appelle série entière complexe de variable complexe une série de fonctions de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

[ANR]
p230

Prop 57 : Si $(a_n z_0^n)$ est bornée avec $z_0 \in \mathbb{C}$ alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq |z| < |z_0|$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. (Abel)

[ANR]
p231

Def 58 : Le nombre $R = \sup \{r > 0 \mid (a_n |r|^n) \text{ soit bornée}\}$ s'appelle le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Rmq 59 l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ est le cercle d'incertitude

Thm 60 : (Abel angulaire) : Soit $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence ≥ 1 tq $\sum a_n$ converge. Soit f la somme de cette série sur $D(0, 1)$. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists p > 0, \exists \theta \in]-\theta_0, \theta_0[\text{ tel que } z = 1 - pe^{i\theta}\}$ alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Thm 61 : (Tauberien faible) : Avec les mêmes notations, on suppose que $\exists S \in \mathbb{C}, \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S$. Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum a_n$ converge vers S .

IV - Séries de Fourier

Def 62 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues par morceaux et 2π -périodique ($\mathcal{B}(\mathbb{T}_{2\pi}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$). On appelle coefficients de Fourier de $f : (n \in \mathbb{Z})$

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (\text{coefficients exponentiels})$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (\text{coefficients trigonométriques})$$

Def 63 : On appelle série de Fourier de f la série : $S(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) \cos(nt) + b_n(f) \sin(nt))$

Prop 64 : (Riemann-Lebesgue) : $a_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm \infty} 0$

Thm 65 : (Parseval) : Soit $f \in \mathcal{B}(\mathbb{T}_{2\pi}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors $\sum |a_n(f)|^2, \sum |b_n(f)|^2$ convergent et on a : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$

Thm 66 (Dirichlet) : Soit $f \in \mathcal{B}(\mathbb{T}_{2\pi}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $(0, 2\pi)$. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$ où $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

Thm 67 : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}_{2\pi}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ avec pour somme la fonction f .

Appli 68 : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Appli 69 : (Formule sommatoire de Poisson) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ tq $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+2\pi n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$ avec $\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i n t} dt$.

Coro 70 : $\forall s > 0, \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$

[ANR]
p231

[GOU]
p252

(DVP)

[GOU]
p253

[ANR]
p299

[ANR]
p301

[ANR]
p312

[ANR]
p310

[ANR]
p314

[ANR]
p315

[ANR]
p316

[GOU]
p273

(DEV)