243

Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

I) Généralités

1) Définitions et premières propriétés [GOU] p 236-237

Déf 1 On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe.

Prop 2 Lemme d'Abel: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors

i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|<|z_0|$ la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

ii) pour tout r, $0<r<|z_0|$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq r\}$

Déf 3 (Rayon de convergence). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre $R=\sup\{r\geq 0 \mid \text{la suite } (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$ s'appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$

Corollaire 4: - pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument

- pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|>R$ $\sum a_n z^n$ diverge

- pour tout r tel que $0\leq r<R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\{z\in\mathbb{C}, |z|\leq r\}$

Déf 5 Le disque ouvert $\{z\in\mathbb{C}, |z|<R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière

Rq: Sur le cercle $|z|=R$, la série entière peut ou non converger.

2) Calcul pratique du rayon de convergence [GOU] p 237

Prop 6 (Règle de d'Alembert). Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$ avec $\lambda\in[0;+\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R=\frac{1}{\lambda}$ (avec $\frac{1}{0}=+\infty$ et $\frac{1}{+\infty}=0$).

Exemple 7: - $e^z=\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini

- Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Prop 8: (Règle de Cauchy). Si $\lim |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda\in[0;+\infty]$ alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R=1/\lambda$.

Exemple 9 $\sum 2^n z^n$ a un rayon de convergence égal à 2.

Rq 10: On ne peut pas toujours utiliser ces 2 propositions: $\sum z^{2n}$: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ n'a pas de limite de même que $|a_n|^{1/n}$

Prop 11: (Règle d'Hadamard) Dans tous les cas le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\frac{1}{\ell}$ avec $\ell=\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{p\geq n}|a_p|^{1/p}\right)$

Exemple 12 $\sum z^{2n}$ a un rayon de convergence égal à 1.

Prop 13 Si $a_n\sim b_n \Rightarrow \sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence [METH] p 158

Ex 14: $\sum \ln(1+\frac{1}{n}) z^n$ et $\sum \frac{1}{n} z^n$ ont même rayon de convergence égale à 1 [METH] p 166

3) Opérations sur les séries entières [GOU] p 237-238

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R'.

Déf 15 La série entière $\sum c_n z^n$ définit par $c_n=a_n+b_n$ est appelée somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Déf 16 La série entière $\sum c_n z^n$ définie par

$$c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

est appelé produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Prop 17 - Le rayon de convergence R_1 de la somme des séries entières vérifie $R_1\geq\inf\{R,R'\}$

- Le rayon de convergence R_2 du produit de Cauchy des séries entières vérifie $R_2\geq\inf\{R,R'\}$

Rq 18 On ne peut rien dire de plus sur R_1 et R_2. Par exemple $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ ont un rayon égal à 1 mais la somme a un rayon ∞.

II) Propriétés de la série entière sur le disque de convergence

1) Continuité, dérivabilité, intégrabilité [GOU] p238

Thm 19 L'application $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque de convergence $\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.

Thm 20 L'application $f : \left]-R, R\right[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^1. La série entière $\sum a_n n x^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$, et on a : $\forall x \in \left]-R, R\right[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

Coro 21 La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $\left]-R, R\right[$. De plus $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$

Thm 22 La somme f de la série entière $\sum a_n z^n$ est holomorphe en tout z_0 du disque ouvert de convergence [OA] p48

Exemple 23 - Cela nous permet par exemple de calculer la série entière de $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n \geq 0} n x^n$

- Calcul de $f(x) = (\ln(1+x))^2$ à l'aide de $(1+x)y' = 2\ln(1+x)$

Thm 24: La série $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et si F désigne la somme de cette dernière, on a $F' = f$ sur $\left]-R ; R\right[$

Ex 25 Permet de calculer $\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} dx$.

2) Analyticité [GOU]

Déf 26 Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est :

- développable en série entière en un point $a \in U$: s'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, tels que le disque $\{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ soit inclus dans U et que sur ce disque on ait $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$. On dit alors que f est égale à la somme de la série entière $z \mapsto \sum a_n (z-a)^n$ sur le disque de centre a et de rayon r
- une fonction analytique sur U : si f est développable en série entière en tout point de U [OA] p46

C-ex 27: La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ peut avoir un rayon de convergence non nul et sa somme peut-être différente de f.

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ [GOU] p241

Thm 28 (Théorème des zéros isolés) [GOU] p239
Soit f la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ sur son disque de convergence. S'il existe une suite (z_p) de nombres complexes non nuls tendant vers 0 telle que $f(z_p) = 0$ pour tout p alors $a_n = 0$ pour tout n.

Conséquence: Si les sommes f et g de 2 séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifient $f(z_p) = g(z_p)$ pour une suite (z_p) comme dans le théorème alors $a_n = b_n$ pour tout n. En particulier, deux séries entières dont les sommes coïncident sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ sont égales.

Thm 29 (Formule de Cauchy) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et f la somme de cette série entière sur son disque de convergence. Alors :

$$\forall r \in \left]0 ; R\right[, \forall n \in \mathbb{N}, 2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$$

Appli 30: Thm de Liouville [GOU] p248
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence est infini. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la somme de cette série entière. Alors : Si la fonction entière f est bornée sur $\mathbb{C}$ alors f est constante

C-ex 31: La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$, mais elle n'est pas constante.

III) Comportement au bord du disque de convergence

[HAU] p261

Sur le cercle de convergence la série entière peut :

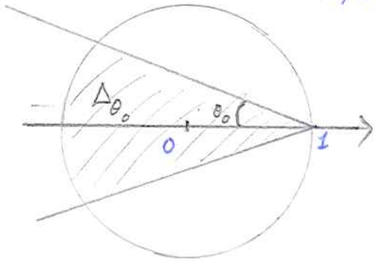
- diverger sur tout le cercle : ex : $\sum z^n$
- converger sur tout le cercle : ex : $\sum \frac{1}{n^2} z^n$
- converger en certains points et diverger ailleurs : $\sum \frac{1}{n} z^n$.

Thm 32 (Théorème d'Abel angulaire) [GOU] p 252

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$ et on pose

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C},\ |z|<1 \text{ et } \exists \rho>0, \exists \theta \in [-\theta_0,\theta_0],\ z = 1-\rho e^{i\theta}\}$$

Alors $\lim\limits_{\substack{z\to 1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$



Thm 33 (Théorème Taubérien faible) [GOU] p253

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité.

On suppose que $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = S$

Alors si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum a_n$ converge et $\sum a_n = S$.

IV) Applications des séries entières

1) Calcul de sommes de séries numériques et dénombrement

Dans certains cas l'étude de $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ permet le calcul de certaines séries numériques en évaluant f en certains points du disque ouvert de convergence.

Ex 34: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1$.

On peut également faire des calculs de dénombrement à l'aide des séries entières et des équations différentielles.

Ex 35 Le nombre de partition de $[\![1,n]\!]$ est:

$$D_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \quad \text{(Nombres de Bell)}$$

2) Résolution d'équation différentielle [METH] p230

Lorsqu'une équation différentielle est à coefficients polynômiaux il peut être intéressant de voir si certaines solutions particulières sont développables en séries entières au voisinage de 0.

Exemple 36: Chercher des solutions particulières pour

$$y'' + \left(1-\frac{2}{x^2}\right)y = 0$$

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R>0$. La somme y de cette série est solution de l'ED sur $]-R,R[\setminus\{0\}$ ssi $x^2y'' + (x^2-2)y = -2a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} [(n-2)(n+1)a_n + a_{n-2}]x^n = 0$

D'après l'unicité du DSE cette équation équivaut à

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 0 \\ (n-2)(n+1)a_n + a_{n-2} = 0 \text{ pour } n>1 \end{cases}$$

Ceci donne diverses solution dont pour $a_2 = -\frac{1}{3}$

$$y_0(x) = \cos x - \frac{\sin x}{x}$$

Références:

[GOU] : Gourdon, Analyse
[OA] : Objectif Agrégation
[METH] : Méthodix
[HAU] : Hauchecorne : Contre exemples en Maths