244

Fonctions développables en série entière, fonctions analytiques. Exemples.

Cadre : On note $\sum a_n z^n$ les séries entières et R le rayon de convergence

I) Fonctions analytiques réelles

[GOU] p240 **1) Définitions et 1ère propriétés**

Déf 1 Une fonction de la variable réelle à valeurs complexes définie dans un voisinage de a_0 est dite développable en série entière (DSE) sur un voisinage de a_0 si sur ce voisinage, f coïncide avec la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

Ex 2 : sin admet un DSE en 0 p242

Prop 3 Si f admet un DSE en a_0 alors f est C^∞ en a_0

C-ex 4 $|x|$ n'a pas de DSE en a_0 car n'est pas C^1 en a_0

Prop 5 Soient f, g admettant des DSE au voisinage de a_0. Alors
p237
- $f \times g$ admet un DSE au voisinage de a_0
- $f + g$ admet un DSE au voisinage de a_0
- f' admet un DSE au voisinage de a_0

Prop 6 Si f admet un DSE en a_0, g admet un DSE en $b = f(a_0)$ Alors $g \circ f$ admet un DSE en a_0. p238

Prop 7 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ est développable en série entière sur un voisinage de 0 ssi $\exists\, \alpha > 0$ tel que la suite de fonction (R_n) définie par
$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$
tende simplement vers 0 sur $]-\alpha;\alpha[$.
La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ a alors un rayon de convergence $\geq \alpha$ et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

C-ex 8 :
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor.
- $f = \varphi(x^2)$ où $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}\, dt$. f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais sa série de Taylor a un RCV nul.

Déf 9 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est analytique réelle sur I si elle admet un DSE au voisinage de tout point de I. [OA] P54 On note $A(I)$ l'ensemble des fct analytiques sur I

Thm 10 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On a équivalence entre :
i) f est réelle-analytique dans Ω
ii) $\forall x_0 \in \Omega$, il existe un voisinage V de x_0 et une série entière $\sum a_n (x - x_0)^n$ absolument convergente dans V telle que $\forall x \in V$ on ait $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x - x_0)^n$ [Z-Q] p294

Ex 11 Si P est un polynôme ne s'annulant pas sur I alors $\frac{1}{P}$ est analytique sur I. Par exemple $\frac{1}{1+x^2}$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

Prop 12 Si f, g sont analytiques sur I Alors :
- $f \times g$, $f + g$ sont analytiques sur I
- f' est analytique sur I.

Prop 13 Si f est analytique sur I et g est analytique sur $J = f(I)$ Alors $g \circ f$ est analytique sur I.

ex 14 $\frac{1}{1+x^2}$ est analytique sur $\mathbb{R}$ donc arctan est analytique sur $\mathbb{R}$.

2) Théorèmes généraux sur les fonctions analytiques

Thm 15 (de Bernstein) Soit $\alpha > 0$ et $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. Si $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\alpha;\alpha[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$. Alors f est DSE sur $]-\alpha; \alpha[$ [GOU] p 250

Ex 16 $f :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$. f' satisfait les hypothèses. Donc f' est analytique sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Donc f l'est aussi

Prop 17 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in A(I)$. Supposons qu'il existe un point $x_0 \in I$ tel que $f^{(j)}(x_0) = 0\ \forall j \in \mathbb{N}$. Alors $f \equiv 0$ dans I. [Z-Q] p 297

C-ex 17 bis $e^{-1/x} 1\!\!1_{]0;+\infty[}$

Corollaire 18 Soit $f \in A(I)$. Si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $f = 0$ sur J alors $f = 0$ sur I

Corollaire 19 (Thm des zéros isolés). Soit $f \in A(I)$ non identiquement nulle. Alors les zéros de f (si ils existent) sont isolés.

Exemple 20 $\sin \frac{\pi}{x}$ est analytique réelle sur $]0;1]$ [OA] p 77

Rq 21 Le corollaire 19 montre qu'il n'y a pas de fonction analytique à support compact non identiquement nulle.

3) Fonctions analytiques et fonctions C^∞

C-ex 22 $x \longmapsto e^{-1/x} 1\!\!1_{]0,+\infty[}$ est C^∞ mais non analytique

Thm 23 (Borel) Pour toute suite (a_k) de $\mathbb{C}$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $f \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(k)}(x_0) = a_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
[Z-Q] p 296

II) Fonctions holomorphes, analyticité sur $\mathbb{C}$

[POM] p 353 **1) Définitions**

Déf 24. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. La fonction f de Ω dans $\mathbb{C}$ est dite holomorphe au point a si le rapport $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ possède une limite au point a selon $\Omega \setminus \{a\}$, limite alors notée $f'(a)$.
- f est dite holomorphe sur Ω si elle est holomorphe en tout point de Ω.

Ex 25: e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$

C-ex 26 $z \mapsto \bar{z}$ n'est pas holomorphe.

Déf 27 Une fonction est dite analytique de Ω dans $\mathbb{C}$ est une fonction développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω.

Thm 28 Toute fonction analytique sur Ω est holomorphe sur Ω

Rq 29 La dérivée d'une fonction analytique est elle même analytique. Une fonction analytique est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{C}$.

Thm 30 (de Cauchy)
Soit f une application holomorphe de l'ouvert Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Alors pour tout a de Ω et tout nombre $r \geq 0$ tels que le disque $\overline{D(a,r)}$ soit contenu dans Ω on a, pour tout z de $D(a,r)$ en désignant par Γ le bord orienté du disque

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(u)\,du}{u-z}$$ et la fonction f est analytique

Appli 31 f holomorphe $\Leftrightarrow$ f analytique.

C-ex 32: $f : (x,y) \longmapsto x - y \in A(\mathbb{R}^2)$
$f(z = x+iy) \longmapsto x - y \notin A(\mathbb{C})$

2) Propriétés

Thm 33 Soit f une fonction analytique non constante sur l'ouvert connexe Ω. Les zéros de f forment un ensemble de points isolés [POM] p 357

Coro 34 Soient f, g 2 fonctions analytiques définies sur l'ouvert connexe Ω. Si l'ensemble des points a tels que $f(a) = g(a)$ possède un point d'accumulation dans Ω, les fonctions f et g coïncident sur Ω.

Ex 35 Il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans $\{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-\}$ qui coïncide avec le fonction $\Gamma(z)$, $z \in \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$
[Z-Q] p 313

Rq 36 L'ensemble des zéros d'une fonction analytique sur Ω peut posséder des points d'accumulation dans la frontière de Ω sans que la fonction soit nulle. [POM] p 357

Déf 37 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe de Ω dans $\mathbb{C}$, z_0 un point de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ et $r \geq 0$ tq $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ soit contenu dans Ω. Si f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(z_0, r)$ on dit que z_0 est une singularité artificielle (effaçable) de f sinon z_0 est appelé (vraie) singularité isolée de f.

Ex 38 $\frac{1}{z-z_0}$: z_0 est une singularité isolée

$\frac{z-z_0}{z^2-z_0^2}$ z_0 est une singularité effaçable

Thm 39 Il existe une fonction g DSE unique, nulle à l'origine telle que z_0 soit une singularité effaçable de la fonction $S : z \mapsto f(z) - g\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ (ie la fonction S admet un prolongement holomorphe en z_0)

Déf 40 Soit avec les notations précédentes, z_0 une singularité de f ; on appelle résidu de f au point z_0 le premier coefficient du développement en série entière de g à l'origine.

Si $g\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \frac{a_1}{z-z_0} + \frac{a_2}{(z-z_0)^2} + \dots$, $a_1 = \mathrm{Res}(f, z_0)$.

Thm 41: Si P est un pavé contenu dans l'ouvert U, et si le bord ∂P de P ne rencontre pas S, on a la formule des résidus : $\int_{\partial P} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{s\in S\cap P} \mathrm{Res}(f,s)$ où $S = \{$singularités de f$\}$

Appli 42 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2m}}\,dx = \frac{\pi}{m\sin\left(\frac{2n+1}{2m}\pi\right)}$ [GOU] p 185

3) Analyticité réelle ou complexe [OA]

Prop 43 Pour toute fonction analytique réelle sur I, il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant I et une fonction g holomorphe sur U telle que f = g sur I p55

Ex 44 $\ln(1+x)$ admet un prolongement analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. p75

III) Problèmes de prolongement

But : prolonger le DSE sur le bord du disque de convergence.

Ex 45 $\ln(1+z)$ ne se prolonge pas en -1 mais en 1 oui

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière rayon de convergence fini. On pose $R=1$. $f(z) = \sum a_n z^n$ dans $D(0,1)$ est analytique dans $D(0,1)$.

On dit que le point a de S^1 est un point régulier de f s'il existe un disque $D(a,r)$ tel que f admette un prolongement analytique sur $D(0,1) \cup D(a,r)$, dans le cas contraire on dit que a est une singularité essentielle de la série entière $\sum a_n z^n$ [POM] p357

Thm 46 f possède au moins une singularité essentielle sur S^1

Thm 47 (Abel angulaire)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in]0;\frac{\pi}{2}[$ et on pose

$\Delta_{\theta_0} = \{z\in\mathbb{C},\ |z|<1 \text{ et } \exists \rho>0,\ \exists\theta\in[-\theta_0;\theta_0],\ z = 1-\rho e^{i\theta}\}$

Alors $\lim_{\substack{z\to1 \\ z\in\Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

[GOU] p252

Ex 48 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

C-ex 49: $\lim_{\substack{z\to1 \\ |z|<1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to1 \\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$ mais $\sum(-1)^n$ diverge

Thm 50 (Taubérien faible)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de RCV 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose qu'il existe $S\in\mathbb{C}$

$\lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} f(x) = S$

si $a_n = o(1/n)$ alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

$\boxed{\text{DVP}}$

IV) Applications aux équations différentielles

[POM] p229

- Les fonctions DSE peuvent être utiles lorsqu'il s'agit de trouver une solution particulière à une équation de la forme

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$

avec a, b, c et d DSE.

On cherche alors y sous la forme d'une fonction DSE

Ex 51 : $x^2y''+xy'+(x^2-\vartheta^2)y=0$ (Bessel).

On cherche y sous la forme $y(x)=x^\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ $\lambda\in\mathbb{C}$.

Si $\lambda=\pm\vartheta$ on obtient $a_{2p+1}=0$

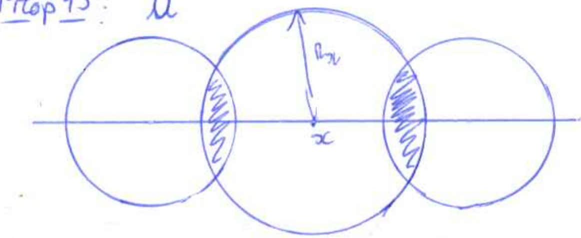
$$a_{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p}\,p!(\lambda+1)\cdots(\lambda+p)}$$

• Mais on peut également fonctionner dans l'autre sens c'est-à-dire utiliser une équation différentielle vérifiée par $f=\sum a_nz^n$ pour trouver f.

Ex 52 : Nombre de Bell [DVP]

Annexe :

Prop 43 : $\mathcal{U}$



Réf :

[GOU] : Gourdon, Analyse pour une bonne partie du I et Abel angulaire & taubérien faible

[OA] : Objectif Agrégation II.3) plus qqs thm

[Z-Q] : Zuily Queffélec I.3) et qqs thm

[POM] Pommelet Agreg de maths cours d'analyse II, III, IV.