

Cadre : Ω ouvert de $\mathbb{C}$. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. $\text{Re } f = P$. $\text{Im } f = Q$
On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ pour les notions de différentiabilité.

I. INTRODUCTION AUX FONCTIONS HOLONOMES

1. Définitions, propriétés élémentaires, exemples

Def 1 f est dite $\mathbb{C}$ -dérivable en un point $a \in \Omega$ si la limite $f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe dans $\mathbb{C}$.

Def 2 f est dite holomorphe dans Ω si f est $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point et si f est de classe $\mathcal{C}^1$.
On notera $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble de ces fonctions.

Ex 3 $z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$ -dérivable sur $\mathbb{C}$, de dérivée 1 donc holomorphe.

Prop 4 La somme, le produit, la composée de deux fonctions $\mathbb{C}$ -dérivables est $\mathbb{C}$ -dérivable. De même pour l'inverse d'une fonction $\mathbb{C}$ -dérivable.

Ex 5 Une fonction polynomiale est $\mathbb{C}$ -dérivable sur $\mathbb{C}$. Une fonction rationnelle sans pôle dans Ω est $\mathbb{C}$ -dérivable sur Ω .

Def 6 f est analytique dans Ω si elle est développable en série entière (DSE) en tout point de Ω .

Ex 7 $z \mapsto 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$.

Prop 8 Une fonction analytique sur Ω est infiniment dérivable sur Ω et ses dérivées sont analytiques.

Cor 9 Une fonction analytique sur Ω est holo sur Ω .

Ex 10 $\exp: z \mapsto \sum z^n/n! \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

2. Holomorphie et différentiabilité

Prop 11 f est $\mathbb{C}$ -dérivable en un point $a \in \Omega$ si et seulement si f est différentiable en a et $df(a)$ est une multiplication droite. Si l'une de ces propriétés est vérifiée, alors $df(a)$ est la multiplication par $f'(a)$.

Cor 12 Toute fonction holomorphe est différentiable sur $\mathbb{C}$.

C-ex 13 la réciproque est fautive $z \mapsto \bar{z}$ est différentiable (même $\mathcal{C}^\infty$) mais non holomorphe.

Thm 14 Conditions de Cauchy - Riemann

Si f est différentiable sur Ω , sont équivalents :

1) f holomorphe sur Ω

2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

3) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$

Cor 15 Si on définit $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ alors f holomorphe sur $\Omega \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$

Prop 16 Si Ω est connexe et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$,
Alors $f' = 0$ sur $\Omega \implies f$ constante

Prop 17 Sous les conditions de la prop 16, on a équivalence :

- f constante sur Ω
- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- $\text{Re}(f)$ constante sur Ω
- $\text{Im}(f)$ constante sur Ω
- $|f|$ constante sur Ω

App Si Ω connexe, les applications $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant $\text{Im } f = (\text{Re } f)^2$ sont exactement les $z \mapsto \lambda^2 + i\lambda$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. FONCTIONS HOLO : PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

1. Formules de Cauchy

Def 18 On appelle chemin dans $\mathbb{C}$ toute application continue $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$)

On dit que γ est un lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Def 19 Soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ et f une fonction continue sur $\text{Im } \gamma$. Alors $\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$.

Ex 20 Si $R > 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^*$
 $\gamma \rightarrow Re^{i\theta}$

Alors $\int_\gamma \frac{dz}{z} = i(0 - 2\pi)$

Def 21 Si $p \in \mathbb{C}$, γ un lacet dans $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. L'indice de γ par rapport au point p est le nombre $I(\gamma, p)$ défini par
 $I(\gamma, p) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-p} \in \mathbb{Z}$ ("nombre de tours")

Thm 22 Théorème de Cauchy. Ω connexe. Si $p \in \Omega$, f continue sur Ω , $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Pour tout lacet γ dans Ω , $\int_\gamma f dz = 0$.

Thm 23 Formule de Cauchy. Ω connexe

[AN] p68

[FAU] p61

[FAU] p65

p193
194

Si $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$ et δ un disque à valeurs dans Ω tel que $f(a) \in I(\delta, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f(z)}{z-a} dz$.

Cor 24 Toute fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$ -dérivable. En particulier, la dérivée d'une fonction holo est holo.

Cor 25 Sous les mêmes conditions que le thm 23:

$$f^{(n)}(a) \in I(\delta, a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Cor 26 Formule de la moyenne [AT] p 84

Si f est holo au voisinage d'un disque $\bar{D}(z_0, r)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

En particulier, $f(z_0)$ est égal à la valeur moyenne de la fonction f sur le cercle ∂D .

2. Analyticité et inégalités de Cauchy

Thm 27 Si $f \in H(D(z_0, r))$ alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$$
 [AT] p 86

et la série converge normalement sur les compacts de D .

Cor 28 En particulier, si $f \in H(\Omega)$, f est analytique sur Ω . Rq avec le Cor 9, on a analytique $\Leftrightarrow$ holomorphe.

Rq le rayon de convergence de la série est au moins égal à $d(z, \Omega^c) \wedge (d(z, \Omega^c) < \infty)$. [AT] p 77

Prop 29 Si $f \in H(D(z_0, R))$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \in]0, R[$

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{\pi(r)}{r^n} \text{ où } \pi(r) = \sup_{z \in S(z_0, r)} |f(z)|$$
 [AT] p 89

De plus, si l'égalité a lieu pour un certain n_0 et un certain r , alors $f(z) = \lambda(z-z_0)^{n_0}$ où λ constante.

App 30 Thm de convergence de Weierstrass [AT] p 91

Si $(f_n) \in H(\Omega)^{\mathbb{N}}$ convergeant uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f .

Alors $f \in H(\Omega)$ et $f_n \xrightarrow{C^k} f$ sur les compacts.

Ex 31 la fonction $S(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ définit une fonction

holomorphe sur le demi-plan $\{\operatorname{Re} s > 1\}$.

[AT] p 91

3. Conséquences de la représentation en série entière (THU)

Thm 32 Principe de prolongement analytique p 52

Si Ω connexe, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega)$. Sont équivalents
 i) $f \equiv 0$ sur Ω ii) $f \equiv 0$ sur un voisinage de a
 iii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(a) = 0$.

Cor 33 Si Ω connexe, $f, g \in H(\Omega)$. Si f et g coïncident au voisinage d'un point de Ω , on a $f = g$. p 52.

Cor 34 Principe des zéros isolés p 53

Si Ω connexe, $f \in H(\Omega)$ non nulle, l'ensemble $Z(f)$ des zéros de f est une partie localement finie de Ω .

Ex 35 Si $0 \in \Omega$, il n'existe pas de fonction $f \in H(\Omega)$ tq $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour n assez grand. p 54.

Thm 36 Thm de Liouville p 85.

Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier et bornée est constante.

App 37 Thm de D'Alembert - Gauss p 85

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

App 38 Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ a au moins une valeur propre. ([AT] p 150)

Def 39 Si f continue sur Ω , on dit que f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω si pour tout disque fermé $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$
 p 85

Rq une fonction holomorphe vérifie la propriété de la moyenne. p 85

Thm 40 Principe du maximum local p 86

Si f vérifie la propriété de la moyenne sur Ω , et si $|f|$ admet un maximum local en $a \in \Omega$, alors f est constante au voisinage de a .

Thm 41 Principe du maximum global p 86

Si Ω connexe et borné, f continue sur Ω et constante au voisinage de chaque point pour lequel elle admet un maximum local. On note π le maximum de $|f|$ sur la frontière de Ω .

• $\forall z \in \Omega$ $|f(z)| \leq \pi$.

• S'il existe $a \in \Omega$ tq $|f(a)| = \pi$ alors f est constante sur Ω .

C-ex 42 la propriété de la moyenne n'empêche pas l'existence de minima locaux. $z \mapsto z$ sur $D(0,1)$. $|f|$ atteint son minimum en $z=0$. [CA] p73

Ex 43 Si Ω connexe, D disque ouvert tq $\bar{D} \subset \Omega$ et $f \in H(\Omega)$ non constante. Si $|f|$ constante sur la frontière de D , alors f a au moins un zéro dans D . p94

App 44 Lemme de Schwarz. p87
 Si $f \in H(D(0,1))$ tq $f(0)=0$ et $\forall z \in D(0,1) \quad |f(z)| < 1$.
 Alors $\forall z \in D(0,1) \quad |f(z)| \leq |z|$ et $|f'(0)| \leq 1$.
 De plus, si $|f'(0)| = 1$ ou si $\exists z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ tq $|f(z_0)| = |z_0|$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad |\lambda| = 1$ et $\forall z \in D(0,1) \quad f(z) = \lambda z$.

4. Intégrales de fonctions holomorphes

Thm 45 Soit $(T, \mathcal{Z}, \mu)$ un espace mesuré et $F: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{C}$.
 Si $\bullet \quad \forall z \in \Omega \quad F(z, \cdot)$ est mesurable.
 $\bullet \quad \forall t \in T \quad F(\cdot, t) \in H(U)$
 $\bullet \quad \forall K \subset \Omega$ compact $\exists u_K \in L^1(T, \mu) \quad |F(z, t)| \leq u_K(t)$ pour tout $z \in K, t \in T$.

Alors $f: z \mapsto \int_T F(z, t) d\mu(t) \in H(U)$. Toutes les dérivées de f s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral.

App 46 Si $X \subset D(0,1)$ alors la fonction caractéristique de X est $t \mapsto e^{-t^2/2}$. [NOU] p82.

App 47 Densité des polynômes orthogonaux
 Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $p: I \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_I |x|^n p(x) dx < +\infty$
 et $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \int_I e^{\lambda x} p(x) dx < +\infty$.

On note $L^2(I, p)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour $\langle f, g \rangle_p = \int_I f(x) \bar{g}(x) p(x) dx$. C'est un Hilbert.

On peut construire une famille de polynômes (P_n) unitaires orthogonaux $z \in \mathbb{C}$ tq $\deg P_n = n$. En normalisant ces polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I, p)$.

III. FONCTIONS MEROMORPHES

1. Singularités et méromorphie

Thm 48 Soient $a \in \mathbb{C}$, $r, R \in (0, +\infty]$ et f holo dans la couronne $C(a, r, R)$. Il existe une suite de nombres complexes $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n (z-a)^n$. C'est le développement en série de Laurent de f sur $C(a, r, R)$.

Rq si $p \in]r, R[\quad \alpha_n = \frac{1}{2\pi i p^n} \int_0^{2\pi} f(a + pe^{it}) e^{-int} dt$.

Def 49 α_{-1} est le résidu de f en a $\alpha_{-1} = \text{Res}(f, a)$.

Def 49 $\bullet$ si $a \in \mathbb{C}$, f a une singularité isolée en a si $f \in H(\mathcal{D}_a^*)$.
 $\bullet$ Si a est une singularité isolée, en reprenant les notations du Thm 48 a est un pôle $\Leftrightarrow \exists m \geq 1 \quad \alpha_{-m} \neq 0$ et $\alpha_n = 0$ pour $n < -m$.

Ex 50 Si $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{z-z}$. z est un pôle de f .

Le DSC de f sur $D(0,1)$ est $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{2k+1}}\right) z^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} z^{2k+1}$.

Def 51 f est méromorphe sur Ω s'il $\exists$ une partie localement finie $A \subset \Omega$ tq $f \in H(\Omega \setminus A)$ et tq tout point de A soit un pôle de f . On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes.

Ex 52 f de l'ex 50 est méromorphe.

Prop 53 Si Ω connexe, $g, h \in H(\Omega) \setminus \{0\}$ alors $\frac{g}{h} \in \mathcal{M}(\Omega)$.
 Rq on a aussi que si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, $f = \frac{g}{h}$ avec $g, h \in H(\Omega) \setminus \{0\}$.

Thm 54 Soit $(f_n) \in \mathcal{M}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ telle que sur tout compact K de Ω $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N$, f_n n'a pas de pôle dans K et $\sum_{n=N}^{\infty} f_n$ CVU sur K . Alors $\sum f_n \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

App 55 Pour z tq $\text{Re}(z) > 0$, on définit $\Gamma: z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$. Elle est holomorphe et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

2. Théorème des résidus et applications

Thm 56 Théorème des résidus [TAU] p103
 Si Ω connexe, $a_1, \dots, a_n \in \Omega$ deux à deux distincts, les a_p sont des pôles de $f \in H(\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_n\})$. γ lacet de Ω tel que $\forall k \quad a_p \notin \text{Int } \gamma$. Alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{p=1}^n \text{Ind}(\gamma, a_p) \text{Res}(f, a_p)$.

Ex 57 $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = \frac{\pi}{3}$

Ex 58 $\forall \alpha \in]0, 1[\quad I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t(1+t)} = \pi / \sin(\pi\alpha)$ [AN] p249

App 59 Formule des compléments
 $\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tq } 0 < \text{Re}(z) < 1 \quad \Gamma(z) \Gamma(1-z) = \pi / \sin(\pi z)$

[TAU] p138

[TAU] p140

[TAU] p99

[AN] p146

[TAU] p143

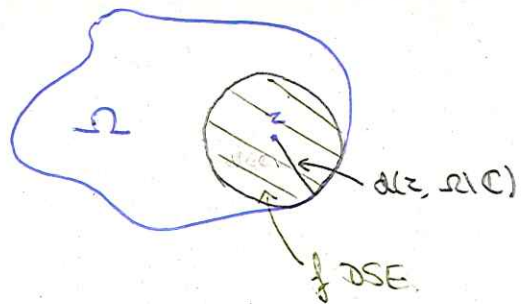
[TAU] p101

[TAU] p101

[TAU] p103-110
 ou [CA] p71

[DVPT]

[AN] p246
 247



[AT] p64

On peut rajouter :

- transformations conformes
- fonctions harmoniques
- def singularité artificielle essentielle et thm de Casorati - Weierstrass.
- Théorème de Rouché.
- anneau des fonctions holomorphes

References

- [AT] Amar - Nattheron, Analyse complexe.
- [TAU] Tauvel, Analyse complexe pour la licence 3.
- [OA] Objectif Agrégation
- [NOUR] Nourel, Agrégation de Mathématiques Épreuve Orale