255 — Espaces de Schwartz. Distributions. Dérivation au sens des distributions.

[Zu] p.19 — <u>Cadre</u>. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$.
Si K est un compact de Ω on note $\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) / \operatorname{supp}\varphi \subset K\}$.
On munit $\mathcal{D}_K(\Omega)$ de la famille de semi-normes
$$p_{K,k}(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$
p.2 — Si K est une suite exhaustive de compacts de Ω, on muni $\mathcal{D}(\Omega)$ de la topologie limite induite par les $\mathcal{D}_{K_n}$.

I] Introduction aux distributions

1) Premières définitions

p.19 — <u>Def 1</u> : Une distribution T sur Ω est une application linéaire continue de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $\mathbb{C}$, ie telle que $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists C_K > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K\, p_{K,k}(\varphi)$, où on note $\langle T, \varphi\rangle$ au lieu de $T(\varphi)$.
On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur Ω.

p.21-23 — <u>Ex 2</u> : . mesure de Dirac en $x_0 \in \Omega$: $\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle = \varphi(x_0)$.
<u>DVPt</u> || . valeur principale de $\frac{1}{x}$: $\langle vp(\frac{1}{x}), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$
. Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, on lui associe la distribution T_f définie par $\langle T_f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)\,dx$.

p.20 — <u>Def 3</u> : La distribution T est dite d'ordre $\leq k$ si $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists C_K > 0$, $|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K\, p_{K,k}(\varphi)$.
T est d'ordre exactement k si elle est d'ordre $\leq k$ mais pas d'ordre $\leq k-1$.

p.22-23 — <u>Ex 4</u> : . δ_{x_0} est d'ordre 0
|| . $vp(\frac{1}{x})$ est d'ordre 1.
. Si $f \in L^1_{loc}$, T_f est d'ordre 0.

p.24-25 — <u>Def 5</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\omega \subset \Omega$ un ouvert. On dit que T est nulle dans Ω si $\langle T, \varphi\rangle = 0$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\omega)$.
Le support de T, noté $\operatorname{supp} T$, est le complémentaire du plus grand ouvert où T est nulle.

<u>Rq 6</u> : $\operatorname{supp} T$ est un fermé. p.25

<u>Ex 7</u> : . $\operatorname{supp}(\delta_{x_0}) = \{x_0\}$
. Si f est continue, $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$. p.25

<u>Prop 8</u> : Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$. Alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

<u>Prop 9</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ d'ordre $\leq k$ et $\varphi \in C_0^k(\Omega)$ telles que $\partial^\alpha\varphi(x) = 0$, $\forall x \in \operatorname{supp} T$ et $|\alpha| \leq k$.
Alors $\langle T, \varphi\rangle = 0$. p.26

<u>Thm 10</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x_0 \in \Omega$. Supposons $\operatorname{supp} T = \{x_0\}$.
Alors il existe $k \in \mathbb{N}$, $(a_\alpha)_{|\alpha|\leq k}$ des complexes tels que $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

<u>Def 11</u> : Soit $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. p.56
On dit que $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

2) Multiplication par une fonction C^∞

<u>Thm-def 12</u> : Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire aT sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par : p.35
$\langle aT, \varphi\rangle = \langle T, a\varphi\rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
est une distribution. p.36

<u>Ex 13</u> : || $x\,vp(\frac{1}{x}) = 1$.

<u>Prop 14</u>. Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$. p.35
Alors $\operatorname{supp}(aT) \subset \operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} T$.

<u>App 15</u> : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On a équivalence entre : p.36
(1) $xT = 0$
(2) $T = C\delta_0$, $C \in \mathbb{C}$.

II | Dérivation au sens des distributions

1) Définition

Thm-def 16 : Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La forme linéaire $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par $\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
p.36 est une distribution, appelée dérivée partielle, au sens des distributions, de T par rapport à la j-ième variable.

p.37 **Rq 17** : Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est d'ordre $\leq k$, alors $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ est d'ordre $\leq k+1$.

p.37 **Prop 18** : Une distribution admet des dérivées de tous ordres. Si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors $\partial^\alpha T$ est une distribution définie par : $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$

p.37 **Rq 19** : $\operatorname{supp} \partial^\alpha T \subset \operatorname{supp} T$.

p.38 **Ex 20** : . Fonction d'Heaviside : $H(x) = \mathbb{1}_{[0;+\infty[}$ $H' = \delta_0$.
. $\langle \partial^\alpha \delta_{x_0}, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0)$.

Rq 21 : La conclusion du thm 10 se réécrit donc : $T = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$.

p.39-40
. Soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$. On pose $x_0 = -\infty$, $\Omega_j =]x_j ; x_{j+1}[$, $j \geq 0$ et $\Omega = \bigcup_{j=0} \Omega_j$.
Pour $j \in \mathbb{N}$, soit $f_j : \Omega_j \to \mathbb{C}$ telle que $f_j \in C^1(\Omega_j)$, $f_j' \in L^1(\Omega_j)$
On définie f pp par : $f(x) = f_j(x)$ pour $x \in \Omega_j$, $j \geq 0$.
On introduit le saut de f en x_j : $\sigma_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$.
$f \in L^\infty_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Soit f' sa dérivée au sens des distributions. On note : $\{f'\}(x) = f_j'(x)$, $x \in \Omega_j$, définie pp.
On a $\{f'\} \in L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Prop 22 : (Formule des sauts)
$$f' = \{f'\} + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \delta_{x_j}$$

2) Primitives de distributions

Thm 23 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. [Bon] p.105
(1) Les distributions u sur I vérifiant $u' = 0$ sont les fonctions constantes.
(2) Pour $v \in \mathcal{D}'(I)$, il existe $u \in \mathcal{D}'(I)$ telle que $u' = v$.
En outre, si $w' = u$ avec $w \in \mathcal{D}'(I)$, alors $w = v + c^{ste}$.

Ex 24 : • Si $f(x) = \log|x|$, $x \neq 0$, alors $f' = vp(\frac{1}{x})$. [Zui] p.38-39
• Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ solution de $T' + aT = f$, où $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f \in C^0(\mathbb{R})$. Alors $T \in C^1$, ie est donnée par une fonction $u \in C^1$, et u vérifie l'équation au sens usuel.

3) Dérivée d'un produit

Soient $f \in C^\infty(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Prop 25 : $\frac{\partial}{\partial x_i}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_i} T + f \frac{\partial T}{\partial x_i}$

Ex 26 : $(xH)' = H$.

Prop 27 (Formule de Leibnitz) [Bon] p.102
$$\partial^\alpha (fT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \, \partial^{\alpha-\beta} T$$

4) Dérivation et convolution

Def 28 : On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des distributions à support compact. [Zui] p.28

Thm-def 29 : Soient $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. La forme linéaire $T * S$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par p.67
$$\langle T*S, \varphi \rangle = \langle T_y \otimes S_z, \varphi(y+z) \rangle = \langle T_y, \langle S_z, \varphi(y+z) \rangle \rangle$$
est une distribution appelée convolution de T et S.

Prop 30 : Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ou $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$)
(1) $T * \varphi$ est C^∞ et donnée par $x \mapsto \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$. p.69
(2) $\operatorname{supp}(T * \varphi) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} \varphi$
(3) Si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $(T*S)*\varphi = T*(S*\varphi)$

Prop 31 : Soient $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ [p.68+70]

(1) $T * S = S * T$ (2) $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$

(3) $\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$

(4) $\mathrm{supp}\,(T * S) \subset \mathrm{supp}\, T + \mathrm{supp}\, S$

(5) Si $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $T * (S * U) = (T * S) * U$.

Cte-ex 32 : $(1 * \delta_0') * H = 0 \neq 1 * (\delta_0' * H) = 1$. [p.74]

III) Distributions et espaces de Schwartz

1) Espace de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$

Def 33 L'espace de Schwartz est : [p.107-108]

$S = S(\mathbb{R}^n) = \{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta} > 0, |x^\alpha \partial^\beta u(x)| \leq C_{\alpha,\beta}\ \forall x \in \mathbb{R}^n \}$.

Muni des semi-normes $p_{\alpha,\beta}(u) = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)|$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$,

S est un espace vectoriel métrisable complet.

Ex 34 : . $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset S$ [p.107]

. $u : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto e^{-|x|^2} \in S$

Prop 35 : S est stable par multiplication, dérivation, convolution. [p.108 p.111]

Prop 36 : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans S. [p.108]

Prop 37 : $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$, $S \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. [p.108]

Def 38 : Pour $u \in S$, la transformée de Fourier de u, notée $\hat{u}$ ou $\mathcal{F}u$ est : $\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) = \int e^{-2i\pi x \xi} u(x)\,dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. [p.113 p.115]

Ex 39 : Si $u(x) = e^{-\pi |x|^2}$, alors $\hat{u} = u$.

Thm 40 : $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective bicontinue de S dans S, d'inverse [p.121]

$\bar{\mathcal{F}} v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x \xi}\, \hat{v}(\xi)\, d\xi$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in S$.

Prop 41 (1) $\int \hat{u}(\xi) v(\xi)\, d\xi = \int u(\xi) \hat{v}(\xi)\, d\xi$. [p.119 p.122] [W.I]

(2) $u * v \in S$ et $\mathcal{F}(u * v) = \hat{u} \cdot \hat{v}$

(3) $\mathcal{F}(uv) = \hat{u} * \hat{v}$

(4) $\mathcal{F}((-2i\pi x)^\alpha u) = \partial^\alpha \mathcal{F}u$ (5) $\mathcal{F} \partial^\alpha u = (2i\pi\xi)^\alpha \mathcal{F}u$ [W.I] p.116

2) Espace des distributions tempérées $S'(\mathbb{R}^n)$

Def 42 : $S'(\mathbb{R}^n) = S'$ est le dual topologique de S, ie l'espace vectoriel des formes linéaires continues de S ds $\mathbb{C}$. [Zu] p.112

Donc $T : S \to \mathbb{C}$ appartient à S' ssi

$\exists k, \ell \in \mathbb{N}, \exists C > 0, |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq \ell}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$, $\forall \varphi \in S$

. $T \in S'$ est appelée distribution tempérée

Rq 43 : . $S' \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ [p.112]

. $\mathcal{E}' \subset S'$

Ex 44 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est mesurable telle que $|f(x)| \leq |P(x)|$ $x \in \mathbb{R}^n$, où P est un polynome, alors $f \in S'$. [p.113]

Prop 45 : Si $T \in S'$, alors $\frac{\partial T}{\partial x_i} \in S'$ et $x_i T \in S'$, $\forall i \geq 1$. [p.112]

Prop 46 : $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$. [p.113]

Thm-def 47 : Si $T \in S'$, la transformée de Fourier de T, notée $\mathcal{F}T$ ou $\hat{T}$, est la forme linéaire sur S donnée par $\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$, $\forall \varphi \in S$, et $\mathcal{F}T \in S'$. [p.114]

Thm 48 : $\mathcal{F}$ est une application linéaire bijective et bicontinue sur les suites de S' dans S', et $\mathcal{F}^{-1} = \bar{\mathcal{F}}$. [W.I] p.146

Ex 49 : . $\mathcal{F}\delta_0 = 1$. $\mathcal{F}1 = \delta_0$ [p.148]

Thm 50 : (Formule sommatoire de Poisson) [DVPT 1] [Gou An] p.272

Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)$.

Cor 51 : Soit $N \geq 0$ et $T_N = \sum_{n=-N}^{N} \delta_n$. [W.I] p.149

Alors $T_N \in S'$ et la suite (T_N) converge dans S' vers une distribution $\delta_{\mathbb{Z}}$ qui vérifie $\hat{\delta}_{\mathbb{Z}} = \delta_{\mathbb{Z}}$.

IV Application : espaces de Sobolev

[Bon] p. 120-121

Def 52 : Soit $m \in \mathbb{N}$. On dit que $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et si les dérivées de u, au sens des distributions jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Thm 53 : Munis du produit scalaire

$$(u|v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} \int \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)}\, dx$$

ou de tout autre produit scalaire donnant une norme équivalente à la norme $\|u\|_m = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2}}$, les espaces $H^m(\mathbb{R}^n)$ sont des Hilbert.

Thm 54 : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans H^m.

[Zui] : Zuily, Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles

[Bon] : Bony, Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier

[Wil] : Willem, Analyse harmonique réelle.