Remédiation 2015-2016

TD2 : intégrales multiples, Fubini, changements de variables, séries multiples

Exercice 1 *Soit* $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \frac{x}{3}\}$. *Dessiner* D, *puis calculer l'intégrale double :* $I := \displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$.

Exercice 2 *Pour* $a > 0$ *on note* D_a *le disque centré en l'origine du plan, de rayon* a, *puis* C_a *le carré centré en l'origine du plan, de coté de longueur* $2a$.

1. *Calculer* $J_a := \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, *et en déduire* $\lim_{a\to+\infty} J_a$.
2. *Justifier que* $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ *est bien définie.*
3. *Relier les intégrales* $I_a := \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ *et* $K_a := \iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, *et en déduire la valeur de* I *grâce à un encadrement de* K_a *par des* $J_{\dots}$.

Exercice 3 *Soit* $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$. *Calculer l'intégrale double :* $I := \displaystyle\iint_D \frac{1}{(1 + x + y)^2}\,dx\,dy$.

Exercice 4 *Calculer de 2 façons différentes* $I = \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$. *En déduire la valeur de* $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$.

Exercice 5 *Soit* $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq \pi/2,\ 1 \leq y \leq 2\}$. *Dessiner* D, *puis calculer l'intégrale double :* $I := \displaystyle\iint_D \cos(xy)\,dx\,dy$.

Exercice 6 *Soit* a *un complexe de module strictement inférieur à 1. En introduisant la famille des nombres* $u_{p,q} = a^{p(2q-1)}$ *(pour* $p, q \geq 1$*), établir l'identité*

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1 - a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1 - a^{2p-1}}$$

Exercice 7 *Existence et valeur de*

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^\star} \frac{1}{(p + q^2)(p + q^2 + 1)}$$