Remédiation 2015-2016

TD5 : Topologie usuelle de R : propriété de Bolzano-Weierstrass, suites de Cauchy, valeurs d'adhérence d'une suite

Exercice 1 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle. Montrer que si* $(u_{2n})_n$ *et* $(u_{2n+1})_n$ *convergent vers une même limite* l *alors* $(u_n)_n$ *converge vers* l. *En déduire que si* $(u_n)_n$ *est croissante et* $(u_{2n})_n$ *converge, alors* (u_n) *converge.*

Exercice 2 *Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle. On veut montrer "convergente"*$\Leftrightarrow$ *"être de Cauchy".*

1. *Montrer que si* $(u_n)_n$ *converge alors elle est de Cauchy*
2. *Réciproquement, soit* $(u_n)_n$ *une suite de Cauchy. Montrer que la suite est bornée et trouver un candidat pour être limite de la suite. Puis, prouver que la suite est convergente.*

Exercice 3 *Montrer que* $(u_n)_n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *converge* $\Leftrightarrow$ *elle est stationnaire (i.e constante à partir d'un certain rang)*

Exercice 4 *Justifier que la suite de terme général* $\cos(n)$ *diverge.*

Exercice 5 *Soit* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels telle que* $\exists\lambda \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}\ |r_{n+1} - r_n| \leq \lambda^n$. *Montrer que* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy.*

Exercice 6 *Vrai ou Faux ? Justifier (preuve ou contre-exemple)*

1. *Toute suite positive divergente tend vers* $+\infty$
2. *Toute suite croissante divergente tend vers* $+\infty$
3. *Toute suite divergente vers* $+\infty$ *est croissante à partir d'un certain rang.*
4. *Toute suite positive décroissante est convergente de limite nulle*
5. *Toute suite positive de limite 0 est décroissante à partir d'un certain rang*
6. *Toute suite convergente vers une limite* $l > 0$ *est positive à partir d'un certain rang*
7. *Toute suite bornée est convergente*
8. *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente*
9. *Si* $(u_n)_n$ *est une suite divergente alors toute sous-suite de* $(u_n)_n$ *diverge*
10. *La somme de deux suites divergentes diverge*
11. *La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente diverge.*

12. *Toute suite convergente est bornée*

13. *Une suite qui admet une unique valeur d'adhérence converge*

Exercice 7 *Série harmonique : Soit* $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

1. *Montrer que* $\forall n > 0$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$
2. *En déduire un encadrement de* H_n *et trouver sa limite*
3. *Montrer que* $u_n = H_n - ln(n)$ *est décroissante positive. Que peut-on conclure ?*

Exercice 8 *Théorème de Cesàro*

1. *Soit* $(v_n)_n$ *suite réelle convergente de limite* l*. Montrer que* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \to l$
2. *Soient* $(v_n)_n$ *suite réelle convergente de limite* l *et* (λ_n) *suite de réels positifs telle que* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \to +\infty$*. Montrer que* $\frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} \to l$
3. *Avons-nous la réciproque suivante :* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \to l \Rightarrow v_n \to l$ *?*
4. *Montrer que si* $v_n \to +\infty$ *alors* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k \to +\infty$
5. *Si* (u_n) *est une suite de période* p*, montrer que* $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to \frac{u_1 + \cdots + u_p}{p}$.
6. *Montrer que si* $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ *et* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l$ *alors* $(u_n^{1/n})$ *converge vers* l*.*