Remédiation 2015-2016

TD6 : normes matricielles

Exercice 1 *Trouver les normes 1,2 et infinie du vecteur* $x = (2, 1, -9, 3, 8)$ *et de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 *(pour les 2 premières questions, il faut procéder en 2 temps en montrant* $\|\!| \ \|\!| \leqslant$ *et* $\geqslant$ *à l'autre côté de l'égalité)*

1. *Montrer que pour* $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\|\!|A\|\!|_1 = \max_{j \in \{1 \ldots n\}} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}|\right)$
2. *Puis que* $\|\!|A\|\!|_\infty = \max_{i \in \{1 \ldots n\}} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$.
3. *Montrer que le rayon spectral de* A *vérifie* $\rho(A) \leqslant \|\!|A\|\!|$ *pour toute norme subordonnée* $\|\!| \ \|\!|$

Exercice 3 *Pour tout réel* α, *on note* A_α *la matrice* $A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

1. *Pour quelles valeurs de* α, *la matrice* A_α *est-elle inversible ?*
2. *Calculer* $\|\!|A_\alpha\|\!|_1$, $\|\!|A_\alpha\|\!|_2$ *et* $\|\!|A_\alpha\|\!|_\infty$.

Exercice 4 *On définit le conditionnement d'une matrice* A *inversible par* $cond_2(A) = \|\!|A\|\!|_2 . \|\!|A^{-1}\|\!|_2$. *Montrer que si* A *est symétrique et inversible alors* $cond_2(A) = \frac{\max_{i \in \{1,\ldots,n\}|\lambda_i|}}{\min_{i \in \{1,\ldots,n\}|\lambda_i|}}$ *où les* λ_i *sont les valeurs propres de* A.

Exercice 5 *Norme de Frobenius. Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *on pose* $\|\!|A\|\!|_{\mathbb{F}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2}$

1. *Montrer que* $\|\!| \ \|\!|_{\mathbb{F}}$ *est une norme matricielle*
2. *Est-ce une norme subordonnée à une norme de* $\mathbb{R}^n$ *(on pourra regarder ce qui se passe pour* I_n*)?*
3. *Montrer que* $\|\!|A\|\!|_{\mathbb{F}}^2 = tr(A \, .^t A)$, *puis que* $\|\!|A\|\!|_2 \leqslant \|\!|A\|\!|_{\mathbb{F}} \leqslant \sqrt{n} \|\!|A\|\!|_2$